Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Чувашской Республики «Чебоксарский экономико-технологический колледж»
Министерства образования Чувашской Республики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по учебному предмету
УПУУ.01 Математика

для специальности
среднего профессионального образования

25.02.08 Эксплуатация беспилотных авиационных систем

Чебоксары
2024

Методические указания для студентов к практическим занятиям являются частью программы подготовки специалистов среднего профессионального образования Чебоксарского экономико-технологического колледжа Минобразования Чувашии и составлены на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО) по специальности 25.02.08 Эксплуатация беспилотных авиационных систем, в соответствии с рабочей программой учебного предмета УПУУ.01 Математика.

Методические указания подготовлены с целью повышения эффективности профессионального образования и самообразования в ходе практических занятий по учебному предмету УПУУ.01 Математика. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Методические указания содержат задания к практическим работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных вопросов по каждой практической работе, требования к знаниям и умениям. Приведен список основной и дополнительной литературы для подготовки к практическим работам.

Методические указания к практическим занятиям предназначены для студентов очной формы обучения.

Организация-разработчик: Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Чувашской Республики «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования Чувашской Республики.

Рассмотрено и одобрено на заседании цикловой комиссии математических и естественнонаучных дисциплин.

Протокол № ___ от «___» ______________ 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по организации выполнения практической работы студентов составлены в соответствии с содержанием рабочей программы учебного предмета УПУУ.01 Математика по специальности 25.02.08 Эксплуатация беспилотных авиационных систем.

Методические указания разработаны для организации самостоятельной работы студентов и рационального использования времени на овладение содержанием учебного предмета, закрепления теоретических знаний, полученных на аудиторных занятиях.

Практическая работа направлена на достижение студентами результатов освоения учебного предмета УПУУ.01 Математика, согласно требованиям рабочей программы

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь:**

Общие компетенции	**Планируемые результаты обучения**	
	Общие	**Предметные**
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам	В части трудового воспитания: - готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие; - готовность к активной деятельности технологической и социальной направленности, способность инициировать, планировать и самостоятельно выполнять такую деятельность; - интерес к различным сферам профессиональной деятельности, Овладение универсальными учебными познавательными действиями: а) базовые логические действия: - самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне; - устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения;	-владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; - уметь оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений; - уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; - уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;

	- определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения; - выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях; - вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям, оценивать риски последствий деятельности; - развивать креативное мышление при решении жизненных проблем б) базовые исследовательские действия: - владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; - выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения; - анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях; -- уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; - уметь интегрировать знания из разных предметных областей; - выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения; и способность их использования в	- уметь оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; - уметь решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; - уметь оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; - уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; - уметь оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и

	познавательной и социальной практике	перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира; - уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники; уметь оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач; - уметь вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; - уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками; -уметь выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить

		примеры математических открытий российской и мировой математической науки
ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	В области ценности научного познания: -сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, способствующего осознанию своего места в поликультурном мире; - совершенствование языковой и читательской культуры как средства взаимодействия между людьми и познания мира; - осознание ценности научной деятельности, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе. Овладение универсальными учебными познавательными действиями: в) работа с информацией: - владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления; - создавать тексты в различных форматах с учетом назначения информации и целевой аудитории, выбирая оптимальную форму представления и визуализации; - оценивать достоверность, легитимность	- уметь оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; - уметь оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; уметь решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни; - уметь свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; уметь распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; уметь использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни

	информации, ее соответствие правовым и морально-этическим нормам; - использовать средства информационных и коммуникационных технологий в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности; - владеть навыками распознавания и защиты информации, информационной безопасности личности	
ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях	В области духовно-нравственного воспитания: -- сформированность нравственного сознания, этического поведения; - способность оценивать ситуацию и принимать осознанные решения, ориентируясь на морально-нравственные нормы и ценности; - осознание личного вклада в построение устойчивого будущего; - ответственное отношение к своим родителям и (или) другим членам семьи, созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни в соответствии с традициями народов России; Овладение универсальными регулятивными действиями: а) самоорганизация:	- уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; - уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; уметь распознавать симметрию в пространстве; уметь распознавать правильные многогранники; - уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число;

	- самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях; - самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов, собственных возможностей и предпочтений; - давать оценку новым ситуациям; способствовать формированию и проявлению широкой эрудиции в разных областях знаний, постоянно повышать свой образовательный и культурный уровень; б) самоконтроль: использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного решения; - уметь оценивать риски и своевременно принимать решения по их снижению; в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность: внутренней мотивации, включающей стремление к достижению цели и успеху, оптимизм, инициативность, умение действовать, исходя из своих возможностей; - эмпатии, включающей способность понимать эмоциональное состояние других, учитывать его при осуществлении коммуникации, способность к сочувствию и сопереживанию; - социальных навыков, включающих способность	находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками

	выстраивать отношения с другими людьми, заботиться, проявлять интерес и разрешать конфликты	
ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	готовность к саморазвитию, самостоятельности и самоопределению; -овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности; Овладение универсальными коммуникативными действиями: б) совместная деятельность: - понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы; - принимать цели совместной деятельности, организовывать и координировать действия по ее достижению: составлять план действий, распределять роли с учетом мнений участников обсуждать результаты совместной работы; - координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия; - осуществлять позитивное стратегическое поведение в различных ситуациях, проявлять творчество и воображение, быть инициативным. Овладение универсальными регулятивными действиями: г) принятие себя и других людей: - принимать мотивы и аргументы других людей при анализе результатов деятельности;	- уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; уметь вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; - уметь свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа; - уметь свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; уметь строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; - уметь использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; - свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; уметь проводить исследование функции;

	- признавать свое право и право других людей на ошибки; - развивать способность понимать мир с позиции другого человека	- уметь использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем
ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста	В области эстетического воспитания: - эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, труда и общественных отношений; - способность воспринимать различные виды искусства, традиции и творчество своего и других народов, ощущать эмоциональное воздействие искусства; - убежденность в значимости для личности и общества отечественного и мирового искусства, этнических культурных традиций и народного творчества; - готовность к самовыражению в разных видах искусства, стремление проявлять качества творческой личности; Овладение универсальными коммуникативными действиями: а) общение: - осуществлять коммуникации во всех сферах жизни; - распознавать невербальные средства общения, понимать значение социальных знаков, распознавать предпосылки конфликтных ситуаций и смягчать конфликты;	- уметь оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; - уметь оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; - уметь использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира

	- развернуто и логично излагать свою точку зрения с использованием языковых средств	
ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения	- осознание обучающимися российской гражданской идентичности; - целенаправленное развитие внутренней позиции личности на основе духовно-нравственных ценностей народов Российской Федерации, исторических и национально-культурных традиций, формирование системы значимых ценностно-смысловых установок, антикоррупционного мировоззрения, правосознания, экологической культуры, способности ставить цели и строить жизненные планы; В части гражданского воспитания: - осознание своих конституционных прав и обязанностей, уважение закона и правопорядка; - принятие традиционных национальных, общечеловеческих гуманистических и демократических ценностей; - готовность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам; - готовность вести совместную деятельность в интересах гражданского общества, участвовать в самоуправлении в общеобразовательной организации и детско-юношеских организациях; - умение взаимодействовать с социальными	- уметь решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; - **уметь оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; уметь формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;* - **уметь свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; уметь задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;* - **уметь выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; уметь распознавать проявление законов математики в искусстве, уметь приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки*

	институтами в соответствии с их функциями и назначением; - готовность к гуманитарной и волонтерской деятельности; патриотического воспитания: - сформированность российской гражданской идентичности, патриотизма, уважения к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, свой язык и культуру, прошлое и настоящее многонационального народа России; - ценностное отношение к государственным символам, историческому и природному наследию, памятникам, традициям народов России, достижениям России в науке, искусстве, спорте, технологиях и труде; - идейная убежденность, готовность к служению и защите Отечества, ответственность за его судьбу; освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные); - способность их использования в познавательной и социальной практике, готовность к самостоятельному планированию и осуществлению учебной деятельности, организации учебного сотрудничества с педагогическими работниками и сверстниками, к	

	участию в построении индивидуальной образовательной траектории; - овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности	
ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях	- не принимать действия, приносящие вред окружающей среде; - уметь прогнозировать неблагоприятные экологические последствия предпринимаемых действий, предотвращать их; - расширить опыт деятельности экологической направленности; - разрабатывать план решения проблемы с учетом анализа имеющихся материальных и нематериальных ресурсов; - осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду; - уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; - предлагать новые проекты, оценивать идеи с позиции новизны, оригинальности, практической значимости; - давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям	- уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; уметь находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения; - уметь оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач; - уметь вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Наименование тем занятий практической работы	**Кол-во часов**	**Форма контроля**
Тема 2.4. Уравнения и неравенства	2	Письменная работа
Тема 2.5. Системы уравнений и неравенств	2	Письменная работа
Тема 3.3. Исследование функции.	2	Письменная работа
Тема 4.2. Иррациональные уравнения.	2	Письменная работа
Тема 4.3. Иррациональные неравенства.	2	Письменная работа
Тема 5.2. Показательные уравнения.	2	Письменная работа
Тема 5.3. Показательные неравенства	2	Письменная работа
Тема 6.3. Логарифмические уравнения	2	Письменная работа
Тема 6.4. Логарифмические неравенства	2	Письменная работа
Тема 7.3. Тригонометрические уравнения	2	Письменная работа
Тема 10.2. Наибольшее и наименьшее значение функции	2	Письменная работа
Тема 11.3. Геометрический смысл интеграла	2	Письменная работа
Тема 13.1. Рациональные уравнения и неравенства с параметрами	2	Письменная работа
Тема 13.2. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	2	Письменная работа
Тема 14.2. Арифметические операции с комплексными числами	2	Письменная работа
Тема 16.2. Параллельное проектирование. Угол между прямыми.	2	Письменная работа
Тема 17.1. Параллельность прямой и плоскости	2	
Тема 18.3. Ортогональное проектирование	2	Письменная работа
Тема 18.5. Правильные многогранники	2	Письменная работа
Тема 19.2. Прямоугольный параллелепипед	2	Письменная работа
Тема 20.2. Призма	2	Письменная работа
Тема 22.2. Объем призмы	2	
Тема 22.3. Объем пирамиды	2	Письменная работа

Тема 23.3. Стереометрические задачи, связанные цилиндром и конусом	2	Письменная работа
Тема 23.5. Стереометрические задачи, связанные со сферой и шаром	2	Письменная работа
Тема 24.2. Объем и площадь поверхности конуса	2	Письменная работа
Тема 24.3. Объем шара и шарового сектора. Площадь сферы	2	Письменная работа
Тема 24.4. Прикладные задачи по теме «Объёмы тел»	2	Письменная работа
Тема 26.6. Серии последовательных испытаний. Испытания Бернулли. Случайный выбор из конечной совокупности	2	Письменная работа
Тема 26.9. Дисперсия и стандартное отклонение	2	Письменная работа
Тема 26.10. Закон больших чисел	2	Письменная работа
Тема 26.11. Элементы математической статистики	2	Письменная работа
Тема 26.13. Распределение Пуассона	2	Письменная работа
Тема 26.14. Связь между случайными величинами	2	Письменная работа
Итого	**68**	

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Ознакомление с заданием и предварительная подготовка к работе.

Практические занятия проводят согласно учебному плану под руководством преподавателя.

1. Предварительная подготовка к выполнению практической работы состоит в следующем:

Преподаватель заранее объявляет о предстоящий практической работе, информирует о содержании и целях работы, порядке ее подготовки и выполнения.

Преподаватель предлагает обучающимся самостоятельное (внеаудиторное)выполнение задания по подготовке к практической работе.

Обучающиеся повторяют теоретический материал к заданной теме, изучают главы параграфов, указанных преподавателем, конспекты.

2. Подготовка и проведение практического занятия.

Преподаватель подробно инструктирует обучающихся о ходе предстоящей работы: называет тему, цели, требования к выполнению работы, особенности заданий, объяснение методов (способов, приемов) их выполнения, критерии оценки.

Преподаватель выдает бланки заданий обучающимся, обучающиеся приступают к выполнению работы: читают задание, задают вопросы, в тетрадь записывают решения, производят расчеты, оформляют ответы и т. д.

В течение практического занятия преподаватель контролирует правильность выполнения заданий, сопровождает дополнительными разъяснениями по ходу работы (при необходимости).

В конце практического занятия проводится подведение итогов, выставляются оценки результатов работы отдельных студентов, ответы на вопросы студентов, выдача рекомендаций по устранению пробелов в системе знаний и умений студентов, по улучшению результатов работы, задание на дом для закрепления пройденного материала и по подготовке к следующему практическому занятию.

3. Требования к выполнению заданий.

Задания необходимо выполнять с максимальной точностью.

Обучающийся должен стремиться к аккуратности, полноте записей. В зависимости от задания, решения должны содержать: расчеты, формулы, заполненные таблицы, графики и пр.

КОНТРОЛЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Критерии оценки

Отметка «5» ставится, если: работа выполнена верно и полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если: работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки); выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если: допущены более одной ошибки или более трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; без недочетов выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, которые обнаруживают незнание обучающимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

К недочетам относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Практическое занятие Сложение, вычитание и умножение, деление комплексных чисел.

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами.

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Число вида $z = a + bi$, где a и b - любые действительные числа, а i - мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется комплексным числом.

Числа a и bi называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1=a_1 + b_1i$ и $z_2=a_2 + b_2i$ считаются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1= a_2$,. $b_1= b_2$.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются сопряжёнными. Сопряженное число обозначается $\bar{z}$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$.

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами:

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
2. $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
3. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot(a_2 + b_2i) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+ b_1i)}{(a_2 + b_2i)} = \frac{(a_1+ b_1i)\cdot(a_2- b_2i)}{(a_2 + b_2i)\cdot(a_2- b_2i)}$

Вопросы для закрепления теоретического материала

1.Дайте определение комплексного числа.
2.Дайте определение мнимой единицы.
3.Назовите натуральные числа.
4.Назовите рациональные числа.
5.Назовите степени мнимой единицы.
6.Какие комплексные числа называются равными?
7.Какие комплексные числа называются сопряженными?
8.Какие комплексные числа называются противоположными?
9.Как выполнить действие над комплексными числами в алгебраической форме?
10.Чему равны корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом?

Задания для практического занятия

Задание № 1. Даны числа $z_1 = -7 - 7i,\quad z_2 = 0{,}2 - 0{,}2i$

Найти: а)$z_1 + z_2$; б) $z_2 - 3z_1$; в) $z_1 \cdot z_2$; г)$\frac{z_1}{z_2}$; д)$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; е) z_1^2; ж) $z_1^3 - 4z_2$

Задание № 2. Решите уравнения:

а) $8x^2 - 21x + 15 = 0$; б) $2x^2 + 2 = 0$;
в) $z^2 - iz - 1 + i = 0$; г) $z^4 = -16i$.

Задание № 3. Составьте квадратное уравнение по корням: $x_1 = 2 - i,\ x_2 = 2 + i.$

Типовые задания

Пример.

а)

Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 5 + 4i$ и $z_2 = 2 + 3i$

Решение

$$z_1 + z_2 = (5 + 4i) + (2 + 3i) = 7 + 7i$$

б)

$$(1 - i)(2 + 4i) = 2 + 4i - 2i - 4i^2 = 6 + 2i\,.$$

в)

$$\frac{1-i}{2-4i} = \frac{1-i}{2-4i} \cdot \frac{2+4i}{2+4i} = \frac{6+2i}{2^2+4^2} = \frac{6}{20} + \frac{2}{20}i = 0{,}3 + 0{,}1i\,.$$

г)

Решим уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$

По второй формуле дискриминанта:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 29} = -2 \pm \sqrt{-25} = -2 \pm 5i$$

<u>Практическое занятие</u> <u>Перевод комплексных чисел из одной формы в другую.</u>

Цель: научиться выполнять действия над комплексными числами.

Краткое теоретические сведения практическому занятию

Комплексное число представимо в одной из трех форм:

$z = a + b \cdot i$ –алгебраическая форма комплексного числа;

$z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ –тригонометрическая форма комплексного числа;

$z = \rho e^{i\varphi}$ –показательная форма комплексного числа.

Если комплексное число задано в показательной или тригонометрической форме, то его действительную и мнимую части можно найти по формулам $\begin{cases} a = \rho \cdot \cos\varphi, \\ b = \rho \cdot \sin\varphi. \end{cases}$

Если комплексное число задано в алгебраической форме, то его модуль можно найти по формуле $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, а аргумент –по таблице 1, приведенной в параграфе 2.

Задания для практического занятия

1. $z=4-4i$
2. $z_1=3+i, z_2=5-2i$
3. $z_1=3+i, z_2=5-2i$

Типовые задания

Пример:

Представить данное число $z = -8 + 15i$ в тригонометрической и показательной форме, найти его действительную и мнимую части, модуль и аргумент.

Решение. Число задано в алгебраической форме. Из условия находим действительную и мнимую части числа: $Re(z) = a = -8$, $Im(z) = b = 15$.

Найдем модуль и аргумент данного числа:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} \Rightarrow \rho = 17.$$

Так как $a < 0,\ b > 0$, то для вычисления аргумента в таблице 1 находим формулу $\varphi = \pi - arctg\left|\frac{b}{a}\right|$, по которой получаем:

$$\varphi = \pi - arctg\left|\frac{-15}{-8}\right| = 180^\circ - arctg1{,}875 \approx 180^\circ - 61^\circ 56' = 179^\circ 60' - 61^\circ 56' \Rightarrow \varphi \approx 118^\circ 04'$$

или $\varphi = \pi - arctg\left|\frac{-15}{-8}\right| = \pi - arctg1{,}875 \approx 3{,}1416 - 1{,}0808 = 2{,}0608$ (радиан).

Ответ: Действительная часть числа z $a = Re(-8 + 15i) = -8$.

Мнимая часть числа z $b = Im(-8 + 15i) = 15$.

Модуль числа z $|z| = mod(z) = \rho = |-8 + 15i| = 17$.

Аргумент числа z $arg(-8 + 15i) = \varphi \approx 118^\circ 04' \approx 2{,}0608$.

Тригонометрическая форма числа: $z = 17(cos118^\circ 04' + i\,sin118^\circ 04')$ или

$z = 17(cos\,2{,}0608 + i\,sin\,2{,}0608)$.

Показательная форма числа: $z = 17\,e^{i118^\circ 04'}$ или $z = 17\,e^{i2{,}0608}$.

Системы линейных уравнений

Практическая работа *«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса».*

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований нужно привести матрицу к ступенчатому виду. Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \| & \| & \| & \| \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

. Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**.

Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \| & \| & \| & \| \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

. Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$

Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.
Последнее выполненное действие – делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \quad y - z = 1 \\ \qquad z = 4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y - z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом:y – 4 = 1, y = 5.
И, наконец, первое уравнение:x + 2y – z= 9. «Игрек» и «зет» известны:

$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$

$x + 6 = 9$, $x = 3$

Ответ:x= 3, y = 5, z =4.

Решить системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$

<u>Метод обратной матрицы.</u>

Метод основан на применении свойств умножения матриц.
Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: А= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; В = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:А·Х = В.
Сделаем следующее преобразование:$А^{-1}$·А·Х = $А^{-1}$·В,
т.к. $А^{-1}$·А = Е, то Е·Х = $А^{-1}$·В
Х = $А^{-1}$·В

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Типовые задания

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Решение. X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$ $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ $M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30};\quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30};\quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30};\quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30};\quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30};\quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30};\quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Задание № 1. Решить системы уравнений методом обратных матриц:

а) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 10 \end{cases}$

***Практическая работа** «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»*

Цель: использовать полученные знания на лекции и применять при решении СЛАУ методом Крамера

Студент должен знать: теорию решения СЛАУ методом Крамера

уметь: решать СЛАУ методом Крамера

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (4)$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрицу $\mathbf{A}$ называют ***основной матрицей*** системы (4), а матрицу $\mathbf{A}^*$ – ***расширенной матрицей*** системы (4).

Пусть $\mathbf{X}$ – матрица-столбец неизвестных, $\mathbf{B}$ – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (4) можно записать в виде матричного уравнения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ Его называют ***матричной формой*** системы (4).

Упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ называется ***решением системы*** (4), если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы. Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют ***совместной***. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Если система совместна, то она имеет либо одно решение, либо множество решений. Система, имеющая единственное решение, называется ***определенной***. Система, имеющая множество решений, называется ***неопределенной***.

Правило Крамера. Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формуле $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,..n$ где Δ - определитель системы, а Δ_i - определитель, получающийся из определителя системы путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при x_i, свободными членами.

Рассмотрим примеры на применение формул:

1. Решить по формулам Крамара следующую систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Вычислим определитель системы и определители при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -25; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 50$$

Найдем значения x; y; z по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-25}{25} = -1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2$$

Итак, получаем ответ (1; -1; 2)

2. Найти произведение матриц А и В, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем каждый элемент матрицы-произведения.

$c_{11} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$

$c_{12} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2$

$c_{13} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1$

$c_{21} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$

$c_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1$

$c_{23} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1$

$c_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 8$

$c_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1$

$c_{33} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$

Следовательно, $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Решить системы (правило Крамера):</u>

1. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ *Ответ*: $\left(\frac{1}{25}; \frac{-43}{25}; \frac{8}{25}\right)$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ *Ответ*: $(4;2;1)$

Практическое занятие Решение задач по линейной алгебре по теме: «Системы линейных уравнений»

Цель: формирование умений вычислять обратные матрицы, методом обратных матриц решать СЛАУ и решать СЛАУ методом Гаусса.

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований нужно привести матрицу к ступенчатому виду. Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$

Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$

Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -5 & 5 & -5 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -2 & -4 & 2 & -18 \\ + & + & + & + \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}$$

. Результат записываем во вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -2 & -28 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ -3 & -6 & 3 & -27 \\ + & + & + & + \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}$$

. Результат записываем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Не нужно считать всё сразу и одновременно. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right)$$

В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right)$

Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \quad\quad y - z = 1 \\ \quad\quad\quad\; z = 4 \end{cases}$$

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z = 4$

Смотрим на второе уравнение: $y - z = 1$. Значение «зет» уже известно, таким образом: $y - 4 = 1$, $y = 5$.
И, наконец, первое уравнение: $x + 2y - z = 9$. «Игрек» и «зет» известны:
$x + 2 \cdot 5 - 4 = 9$
$x + 6 = 9$, $x = 3$

Ответ: $x = 3$, $y = 5$, $z = 4$.
Решить системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18 \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$

<u>Метод обратной матрицы.</u>

Метод основан на применении свойств умножения матриц.
Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.
Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,
т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$
$X = A^{-1} \cdot B$
Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Типовые задания

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Решение. X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$;

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ $M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30};$ $a_{12}^{-1} = \frac{1}{30};$ $a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30};$ $a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30};$ $a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30};$ $a_{32}^{-1} = \frac{19}{30};$ $a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Задание № 1. Решить системы уравнений методом обратных матриц:

а) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 10 \end{cases}$

Основные понятия и методы математического анализа

<u>Практическая работа</u> *<u>«Нахождение пределов функции».</u>*

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Предел функции – величина, к которой стремится значение данной функции при стремлении ее аргумента к предельной для области определения точке.

Запись предела:

- предел обозначается значком lim;
- под ним добавляется, к какому значению стремится аргумент (переменная) функции. Обычно, это x, но не обязательно, например: “x→1″;

- затем справа дописывается сама функция, например:

$$\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

Таким образом, финальная запись предела выглядит выглядит так (в нашем случае):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x+1}$$

Читается как “предел функции при икс, стремящемся к единице”.

x→1 – это значит, что “икс” последовательно принимает значения, которые бесконечно приближаются к единице, но никогда с ней не совпадут (ее не достигнут).

Задания для практического занятия

Задание 1. Найти пределы функции

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-5x+1}{8x^2-9x+1}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-9x}{6x^3-x+1}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^4+1}{8x^2-11x+1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3\sqrt{x}}{x^2-1}\quad \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3-x^2}\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg 2x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin 2x}\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{tg 9x}\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Типовые задания

Найдем предел функции ниже.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x-1}$$

Решение

1. Для начала подставим в функцию число 1, к которому стремится *“икс”*.

Получаем неопределенность рассматриваемого нами вида.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1} = \frac{2 \cdot (1)^2 - 5 \cdot 1 + 3}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

2. Далее раскладываем числитель и знаменатель на множители. Для этого можно воспользоваться формулами сокращенного умножения, если они подходят, или решить квадратное уравнение.

В нашем случае корнями выражения в числителе ($2x^2 – 5x + 3 = 0$) являются числа 1 и 1,5. Следовательно его можно представить в виде: $2(x-1)(x-1,5)$.

Знаменатель ($x – 1$) изначально является простым.

3. Получаем вот такой видоизмененный предел:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2\,(x - 1)(x - 1,5)}{x - 1}$$

4. Дробь можно сократить на ($x – 1$):

$$\lim_{x \to 1} \frac{2\,\cancel{(x - 1)}(x - 1,5)}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \to 1}(2x - 3)$$

5. Остается только подставить число 1 в выражение, получившееся под пределом:

$$\lim_{x \to 1}(2x - 3) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

__Практическая работа__ «Вычисление производных элементарных функций»

__Цель работы:__ закрепить навыки нахождения частных значений производных, вычисления производные сложных и обратных функций, нахождения производных высших порядков.

Студент должен знать: определение производной, табличные значения производных элементарных функций, правила нахождения производной сложной функции
уметь находить производные функций.

__Пояснение к работе__

Теоретические сведения

__Производной__ $y'(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для дифференцируемой функции с производной, отличной от нуля, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Таблица производных.

1. $C' = 0;$
2. $x' = 1;$
3. $(Cu)' = C \cdot u';$
4. $(x^n)' = nx^{n-1};$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
6. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2};$
7. $(\sin x)' = \cos x;$
8. $(\cos x)' = -\sin x;$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

Правила дифференцирования.

I. $(u + v)' = u' + v';$

II. $(uv)' = u'v + uv';$

III. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$

IV. $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}.$

__Пример 1__.Найти производную функции

$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x.$

Решение.

$$y' = (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' = (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' =$$
$$= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x') = 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7.$$

__Пример 2__.Найти производную функции

$(2x - 1)\sqrt{x}.$

Решение.

$$\left((2x-1)\sqrt{x}\right)'=(2x-1)'\sqrt{x}+(2x-1)\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=2\sqrt{x}+(2x-1)\bullet\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{2x-1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2+2x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x-1}{2\sqrt{x}}.$$

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методическими рекомендациями по проведению практического занятия .
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Решить задачи в соответствии с заданием.
4. Выполненные задания покажите преподавателю. Возможен устный опрос.

Работа в кабинете

Вариант1.	Вариант2.	Вариант3.
1.Найти производные функций при данном значении аргумента:		
а)$f(x)=x^3+3x^2-4x-5$, $x=2$; б)$f(x)=(x+1)\sqrt{x-1}$, $x=5$;	а)$f(x)=2x^3+x^2+3x-5$, $x=2$; б) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$, $x=10$;	а)$f(x)=x^3-5x^2-4x-1$, $x=2$; б) $f(x)=(x-1)\sqrt{x+1}$, $x=8$;
2. Вычислить производные сложных функций:		
а) $f(x)=(5x^2-3)^5$; б) $f(x)=-2\sin(3x-1)$	а)$f(x)=(4x^2+5)^6$; б) $f(x)=-6\cos(5x-3)$	а)$f(x)=(7x^2=4)^5$; б) $f(x)=-7\cos(2x-3)$
3. Найти производные второго порядка:		
а) $f(x)=2x^7+3x^2$; б) $f(x)=2e^x+x^5+1$	а) $f(x)=3x^{10}-5x^2$; б) $f(x)=3e^x+x^3+1$	а) $f(x)=4x^8-2x$; б) $f(x)=4e^x+x^6+1$
4.Найти производную обратной функции:		
а) $f(x)=\arcsin 25x$	а) $f(x)=\arccos 25x$	а) $f(x)=\mathrm{arctg}\, 25x$
4. Составить и решить уравнение $f(x)'=g(x)'$:		
$f(x)=\ln 4x$, $g(x)=10^x+1$	$f(x)=\ln 3x$, $g(x)=5^x-2$	$f(x)=\ln 5x$, $g(x)=10^x+5$

Дополнительное задание.

Вычислить производные:

а) $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3}$;б) $f(x)=(x^3-1)(x^2+x+1)$.; в) $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$.

Контрольные вопросы

1.Дать определение производной.
2. Правило нахождения производной сложной функции.
3. Как вычислить частное значение производной?

Содержание отчета

В тетради для практических занятий необходимо:
1) указать наименование занятия и его номер;
2) указать цель занятия;
3) указать порядок выполнения заданий;
4) оформить решение задач в тетради.

***Практическая работа** «Дифференцирование сложной функции»*

Пояснение к работе

Дифференциалом функции называют линейную часть приращения функции. При определении значения, которое имеет дифференциал функции, анализируют определенную точку функции и бесконечно малое изменение аргумента. Предположим, что x0 является какой-то точкой, включенной в область определения некой функции . Пусть ^x обозначает бесконечно малую величину.

В этом случае вычислить дифференциал функции можно с помощью умножения значения производной функции на приращение аргумента заданной функции. Обозначение дифференциала функции f(x) имеет следующий вид: df(x).

Понятие дифференциала функции можно рассмотреть с геометрической точки зрения. Смысл состоит в том, что дифференциал функции f(x) соответствует приращению ординаты касательной к графику функции, пересекающей какую-то точку с координатами (x,y) при изменении координаты x на величину ^x = dx.Дифференциал представляет собой ключевую линейную часть функции по отношению к приращению аргумента. Если уменьшается приращение функции, увеличивается составляющая приращения, которая приходится на данную линейную часть.В результате, если ^x бесконечно мало, приращение функции допустимо приравнять к дифференциалу этой функции. Озвученное свойство дифференциала помогает во многих случаях применять это понятие, чтобы выполнять ориентировочные вычисления, представлять доказательства прямых и обратных теорем, оценивать, какие погрешности имеют измерения при решении самостоятельных задач и заданий в классе.

Практические задания

1. $y=(x^3-2x^2+5)^3$ *; 1)* $y=(1-2x^3)^6$ *; 1) ;*
2. $y=\sqrt{1-3\sin x}$ *; 2)* $y=\sqrt{x^3+2x-1}$ *; 2) ;*
3. *y =* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+2x}}$ *; 3) y =* $\dfrac{2}{\sqrt[5]{8x-3}}$ *; 3) ;*
4. $y=x^2e^{-x}$ *. 4) y =* $\sqrt{11x+12}$ *· ctg (5 – 8x). 4)* $y=(x+2)e^{-x}$ *;*
5. $y=\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ *. 5)* $y=\sqrt[3]{x^3-1}$ *. 5) .*

Типовые задания

Попробуем вычислить предел:

$$\lim_{x>0,y>0} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$$

Решение

Исходя из записанного ранее определения предела, запишем формулу и подставим значения:

$$\lim_{x\to 0,y\to 0} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0,y\to 0} \frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{(3-\sqrt{xy+9})(3+\sqrt{xy+9})} = \lim_{x\to 0,y\to 0} \frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{(9-xy+9)} = \lim_{x\to 0,y\to 0} \frac{xy(3+\sqrt{xy+9})}{-xy} = \$\$\$\$ = -\lim_{x\to 0,y\to 0}(3+\sqrt{xy+9}) = -6$$

Ответ: -12

Требуется вычислить предел:

$$\lim_{x>0,y>0} \frac{\sin xy}{y}$$

Решение

Воспользуемся уже знакомой формулой и запишем решение:

$$\lim_{x>0,y>0} \frac{\sin xy}{y} = \left[\frac{0}{0}\right] = [\sin xy \sim xy,\ (x>0, y>0)] = \lim_{x>0,y>0} \frac{xy}{y} = \lim_{x>0,y>0} x = 0.$$

Ответ: 0.

<u>Практическая работа</u> <u>«Вычисление второй производной и производных высших порядков»</u>

<u>Пояснение к работе</u>

Производная высшего порядка функции – это производная от производной, и так далее, до нужного порядка. Она показывает, как меняется скорость изменения функции с учетом всех предыдущих изменений.

Для определения производной высшего порядка функции f(x), мы последовательно берем производные от функции, пока не достигнем нужного порядка. Например, производная второго порядка обозначается как f’’(x) или d^2f(x)/dx^2.

Формально, производная высшего порядка определяется как предел отношения приращения производной предыдущего порядка к приращению аргумента, при стремлении приращения аргумента к нулю:

f’’(x) = lim(h->0) [f'(x+h) – f'(x)] / h

Таким образом, производная высшего порядка показывает, как быстро меняется скорость изменения функции с учетом всех предыдущих изменений.

1. Линейность: производная высшего порядка линейна по отношению к функции. Это означает, что если f(x) и g(x) – функции, а a и b – константы, то производная высшего порядка от суммы a*f(x) + b*g(x) равна a*f’’(x) + b*g’’(x).

2. Правило Лейбница: производная высшего порядка произведения двух функций равна сумме произведений производных высших порядков этих функций. Формально, если f(x) и g(x) – функции, то (f*g)’’(x) = f’’(x)*g(x) + 2*f'(x)*g'(x) + f(x)*g’’(x).

3. Правило дифференцирования сложной функции: производная высшего порядка сложной функции равна произведению производных высших порядков внутренней и внешней функций, умноженных на производные нижних порядков внутренней и внешней функций соответственно. Формально, если y = f(g(x)), то y’’(x) = f’’(g(x))*g'(x)^2 + f'(g(x))*g’’(x).

4. Симметрия: производные высших порядков симметричны относительно порядка производной. Это означает, что f’’(x) = f’’(-x), f’’'(x) = -f’’'(-x) и так далее.

5. Производная высшего порядка от постоянной функции равна нулю. Это означает, что если f(x) = c, где c – константа, то f’’(x) = 0, f’’'(x) = 0 и так далее.

Эти свойства производных высших порядков помогают нам анализировать и решать задачи, связанные с изменением функций и их скоростью изменения.

Практические задания

1. Найти производные второго порядка:

1) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$; 2) $y = (2x+5)^3$;

3) $y = \dfrac{1}{x-1}$; 4) $y = -\dfrac{22}{x+5}$;

5) $y = \cos^2 x$; 6) $y = e^{-x^2}$;

7) $y = 5^{\sqrt{x}}$; 8) $y = x \sin 2x$;

9) $y = e^x \cos x$.

2. Дана функция $f(x) = \sin 3x$. Найти $f''\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$.

3. Найти производные третьего порядка:

4. 1) $y = \dfrac{x}{6 \cdot (x+1)}$; 2) $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$; 3) $y = (2x+3)^3 \cdot \sqrt{2x+3}$.

5. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $v = e^{2t}$.

6. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функций:

7. 1) $y = 2x^3 + 5x^2$; 2) $y = e^{t^3}$;

8. 3) $y = x \cdot (\ln x - 1)$.

9. Показать, что функция $y = 4e^{-2x} - 5e^x$ удовлетворяет уравнению $y''' - 3y' + 2y = 0$.

Вопросы для самоконтроля:

10. Что называется производной второго порядка?

11. Что называется производной n – гопорядка?

12. Что называется дифференциалом функции?

13. Что называется дифференциалом второго порядка?

14. Что называется дифференциалом n – гопорядка? По какой формуле он вычисляется?

Типовые задания

Задание 1:Найти y', y'', y''', …, если $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$.

Решение: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$,

$y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{IV} = 120x + 48$, $y^{V} = 120$, $y^{VI} = y^{VII} = ... = 0$.

Задание 2:Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = (2x - 3)^3$.

Решение: $dy = 3 \cdot (2x - 3)^2 \cdot 2dx = 6 \cdot (2x - 3)^2 dx$,

$d^2y = 12 \cdot (2x - 3) \cdot 2dx^2 = 24 \cdot (2x - 3)dx^2$,

$d^3y = 24 \cdot 2dx^3 = 48dx^3$.

<u>Практическая работа</u> *<u>«Исследование функций с помощью производной. Построение графикафункции».</u>*

Цель работы: Используя схему исследования функции уметь строить графики функций.
Содержание работы:

Общая схема построения графиков функций

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти асимптоты графика функции.

5. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
7. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример

Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение:

1. Функция определена на всей числовой оси, то есть $D(y) = R$.
2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x = 0$, получим $y = -3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
5. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Далее, имеем $(3x^2 - 12x + 9 = 0) \Leftrightarrow$ $(x^2 - 4x + 3 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$ Точки $x = 1$ и $x = 3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$ и $3 < x < +\infty$ $y' > 0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y' < 0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(3) = -3$.
6. Найдем вторую производную: $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функция на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$, то есть в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < +\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получаем точку перегиба $(2; -1)$.
7. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 1).

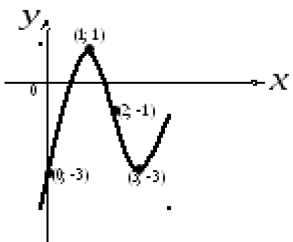


рис.1

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1) $y = 2x^2 - 8x$; 2) $y = -3x^2 + 12x$;

3) $y = x^2 + 5x + 4$; 4) $y = -x^2 + 2x + 15$;

5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = 3x^3 - x$;

7) $y = -x^3 + x$; 8) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$;

9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$; 10) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

11) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; 12) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение возрастания и убывания функции.
2. Дайте определение экстремума функции.
3. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции?
4. Сформулируйте определение асимптоты. Перечислите основные виды асимптот.
5. Сформулируйте общую схему исследования функции для построения графи

Интегралы

<u>Практическая работа «Вычисление неопределенных интегралов»</u>

Цель: закрепить умения интегрировать функцию, используя таблицу основных интегралов, используя методы замены и интегрирования по частям.

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Совокупность F(x) + C всех первообразных функций $f(x)$ на интервале $a< x <b$ называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $f(x)dx$ –подынтегральное выражение; $f(x)$ – подынтегральная функция; x – переменная интегрирования; C –произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

2. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + C$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x dx + C$

5. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$

11. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$

14. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

18. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

19. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

<u>1. Непосредственное интегрирование</u>

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Задания для практического занятия

Задание № 1. Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.

1) $\int x^3dx$ 2) $\int x^{11}dx$ 3) $\int 5dx$

4) $\int \frac{dx}{4}$ 5) $\int x\sqrt{2}dx$ 6) $\int \frac{2}{3}x^4dx$

7) $\int \frac{dx}{x^5}$ 8) $\int (x-5e^x)dx$ 9) $\int (\frac{5}{x}+\sin x)dx$

10) $\int (2^x-1)dx$ 11) $\int \frac{dx}{16+x^2}$ 12) $\int \frac{3a}{\cos^2 x}dx$

13) $\int (5x^4-7x^6+3)dx$

Задание № 2. Найти неопределенный интеграл

1. а) $\int (2-3e^x+x)dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x}}dx$.

2. а) $\int (3x^5-\cos x-1)dx$; б) $\int \frac{x^{-1/2}+2}{\sqrt{x}}dx$.

3. а) $\int (7x^6-\sin x+3)dx$; б) $\int \frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{x}dx$.

Типовые задания

Пример 1. Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов

1) $\int (x+3)(x-2)dx$

Решение. $\int (x+3)(x-2)dx = \int (x^2+x-6)dx == \int x^2dx + \int xdx - 6\int dx = \frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$

2) $\int \frac{3a+1}{ax^3}dx$

Решение. $\int \frac{3a+1}{ax^3}dx = \frac{3a+1}{a}\int \frac{1}{x^3}dx = \frac{3a+1}{a}\int x^{-3}dx = \frac{3a+1}{a}\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C = \frac{3a+1}{a}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C = -\frac{3a+1}{ax^2}+C$

3) $\int x\sqrt[5]{x^3}dx$

Решение.

$$\int x\sqrt[5]{x^3}dx = \int x\cdot x^{\frac{3}{5}}dx = \int x^{\frac{8}{5}}dx = \frac{x^{\frac{8}{5}+1}}{\frac{8}{5}+1}+C = \frac{x^{\frac{13}{5}}}{\frac{13}{5}}+C = \frac{5}{13}x^2\cdot x^{\frac{3}{5}}+C = \frac{5}{13}x^2\sqrt[5]{x^3}+C$$

Пример 2. Найти интеграл

1) $\int \frac{3dx}{x^7}$.

Решение. Воспользуемся определением степени с отрицательным показателем ($a^{-n}=1/a^n$, a□□0) и найдем неопределенный интеграл от степени $\int \frac{3dx}{x^7} = \int 3x^{-7}dx = \frac{3x^{-6}}{-6} = -\frac{1}{2x^6}$.

2) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

Решение. Раскроем скобки по формуле $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$и неопределенный интеграл от полученной алгебраической суммы функций заменим такой же алгебраической суммой неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int \left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx = \int dx - 2\int x^{-2}dx + \int x^{-4}dx =$$

$$= x - 2\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + C = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример вычисления 1: С развернутым оформлением

Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение:

Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда $dt = t' \cdot dx = (3x-4)' \cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$.
Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения $3x\text{-}4$ подставим t, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x\text{-}4$), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Решение:

$$\int sinx cosx dx = \left| \begin{matrix} t = sinx \\ dt = cosxdx \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}sin^2 x + C.$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	***Вариант 2.***
Вычислите интегралы	***Вычислите интегралы***
1. $\int(2x+1)^4\,dx$	**1.** $\int(3x-4)^3\,dx$
2. $\int cos^8x\cdot sinx\cdot dx$	2. $\int sin^6x\cdot sinx\cdot dx$

3. Вычисление неопределённых интегралов по частям

Формула интегрирования по частям

$\int$ udv = uv - $\int$ vdu

Пример вычисления 1:

С развернутым оформлением

Вычислить

$$\int xe^x dx.$$

Решение. Полагая, что

$$u = x,$$
$$du = dx,$$
$$dv = e^x dx,$$
$$v = e^x,$$
$$\int dv = \int e^x dx,$$

находим

$$\int xe^x dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл методом подстановки: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$

Решение.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}} = \left|\begin{array}{l} x^3-1=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int\frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{t^3}} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{3\sqrt{x^3-1}} + C$$

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям (способ выбора множителей *u* и *dv*)

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\, P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	$U = \operatorname{arcctg} kx \to dU = -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$P_n(x)$ – многочлен от x степени n, т.е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 1. Проинтегрировать по частям:

1) $\int x^2 \cos x\, dx$

Решение.

$$\int x^2 \cos x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = cosx\,dx & v = -sinx \end{matrix} \right\} = -x^2 sinx - \int 2x\,(-sinx)dx$$

Рассмотрим получившийся интеграл

$$2\int x \sin x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = sinxdx & v = -cosx \end{matrix} \right\}$$

$$= -2x\, cosx - \int (-cosx)dx = -2xcosx + sinx$$

Пример. 2 $\int (3x-1)\sin 2xdx$

Решение.

$$\int (3x-1)\sin 2xdx = \left| \begin{matrix} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2xdx \to V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{matrix} \right| = (3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2}) + \int \frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

Вариант 1	***Вариант 2.***
Вычислите интегралы **1.** ∫ *(4x-5)lnxdx* 2. ∫ *2xsinxdx* 3. ∫ *(6x-3)e^{x}dx*	***Вычислите интегралы*** **1.** ∫ *(5x+7)lnxdx* 2. ∫ *3xcosxdx* 3. ∫ *(6x-3)e^{x}dx*

Практическая работа*«Вычисление методом замены переменных и интегрирование по частям»*

Пояснение к работе

Метод замены переменной (метод подстановки) – наиболее общий метод, часто применяемый при вычислении интегралов. Им часто приходится пользоваться и для того, чтобы получить табличный интеграл из справочника. Состоит он в том, что при вычислении

$$\int f(x)dx \quad (2.1)$$

вместо переменной *x*вводится новая переменная*t* по формуле $x=\phi(t)$, причем $\phi(t)$ подбирается так, чтобы после подстановки получилась подынтегральная функция, более удобная для интегрирования. При этом справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt. \quad (2.2)$$

Для доказательства этой формулы достаточно вычислить дифференциалы от каждой ее части. Имеем

$$d\int f(x)dx = f(x)dx,\ d\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt = f[\phi(t)]\phi'(t)dt = f[\phi(t)]d\phi(t) = f(x)dx.$$

Дифференциалы равны, поэтому обе части равенства представляют собой одно и то же семейство первообразных для функции $f(x)$, то есть формула (2.2) имеет место.

Таким образом, для вычисления интеграла (2.1) методом замены переменной нужно не только в функции $f(x)$ заменить*x* на $\phi(t)$, но и dx выразить через*t* и dt, то есть положить $dx=\phi'(t)dt$. В результате вычисления получим функцию от переменной*t*. Чтобы возвратиться к переменной*x*, достаточно в полученной функции заменить*t*значением $t=\phi^{-1}(x)$, где $\phi^{-1}(x)$ – обратная к $\phi(t)$ функция, то есть*t* найти из уравнения $x=\phi(t)$.

Заметим, что формулу (2.2) часто применяют справа налево, то есть записывают ее в виде

$$\int f[\phi(x)]d\phi(x) = \int f(t)dt, \text{ где } \phi(x)=t. \quad (2.3)$$

Если $F(t)$ – первообразная для функции $f(t)$, то есть $\int f(t)dt = F(t) + C$, то из (2.3) получаем

$$\int f[\phi(x)]d\phi(x) = F[\phi(x)] + C.$$

В частном случае, когда $\phi(x) = ax + b,\ d\phi(x) = adx$, имеем

$$\int f(ax+b)\cdot adx = F(ax+b) + C,$$

откуда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Типовые задания

Вычислим интегралы: 1) $\int\sqrt{a^2 - x^2}dx\ (a > 0)$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+1)}$; 3) $\int\frac{e^{arctg\,x}dx}{1+x^2}$.

Решение.

1) $$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \begin{vmatrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{vmatrix} = \int\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\ a\cos t\,dt = \int a^2\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= a^2\int\cos t|\cos t|dt = (\text{полагаем } t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)) = a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}a^2(t +$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2t) + C = \frac{1}{2}a^2\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C.$$

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+1)} = \left|x = t^4,\ dx = 4t^3dt,\ t = \sqrt[4]{x}\right| = \int\frac{4t^3dt}{\sqrt[4]{t^{12}}(\sqrt{t^4}+1)} = \int\frac{4t^3dt}{t^3(t^2+1)} = 4\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 4arctg\,t + C = 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

3) $$\int\frac{e^{arctg\,x}dx}{1+x^2} = \int e^{arctg\,x}d(arctg\,x) = |arctg\,x = t| = \int e^t dt = e^t + C = e^{arctg\,x} + C.$$

Выведем теперь формулу интегрирования по частям. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, дифференцируемые на некотором промежутке *X*. Тогда

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Интегрируя обе части последнего равенства и учитывая, что для $d(uv)$ первообразной является uv, получим

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Задания для практической работы

Задание № 1. Найти частные производные функций:

а) $z = (x^3 + y^3 - xy^2)^3$; б) $z = \arcsin\frac{y}{x}$; в) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$;

г) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; д) $z = \ln(xy + \ln xy)$; е) $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{z}\right)$

***Практическая работа** «Вычисление определенных интегралов»*

Цель работы: Используя схему исследования функции уметь строить графики функций.
Содержание работы:

Общая схема построения графиков функций

8. Найти область определения функции.
9. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
10. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
11. Найти асимптоты графика функции.
12. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
13. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
14. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример

Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение:

8. Функция определена на всей числовой оси, то есть $D(y) = R$.
9. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
10. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x = 0$, получим $y = -3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
11. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
12. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Далее, имеем $(3x^2 - 12x + 9 = 0) \Leftrightarrow$ $(x^2 - 4x + 3 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$ Точки $x = 1$ и $x = 3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$ и $3 < x < +\infty$ $y' > 0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y' < 0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(3) = -3$.

13. Найдем вторую производную: $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функция на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$, то есть в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < +\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получаем точку перегиба $(2; -1)$.
14. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 1).

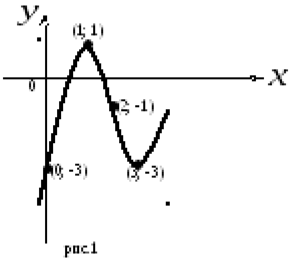


рис.1

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1) $y = 2x^2 - 8x$; 2) $y = -3x^2 + 12x$;

3) $y = x^2 + 5x + 4$; 4) $y = -x^2 + 2x + 15$;

5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = 3x^3 - x$;

7) $y = -x^3 + x$; 8) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$;

9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$; 10) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

11) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; 12) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$.

Вопросы для самоконтроля:

6. Дайте определение возрастания и убывания функции.
7. Дайте определение экстремума функции.
8. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции?
9. Сформулируйте определение асимптоты. Перечислите основные виды асимптот.
10. Сформулируйте общую схему исследования функции для построения графика.

Практическая работа *«Решение задач на вычисление производных функций»*

Цель работы: закрепить навыки нахождения частных значений производных, вычисления производные сложных и обратных функций, нахождения производных высших порядков.

Студент должен знать: определение производной, табличные значения производных элементарных функций, правила нахождения производной сложной функции
уметь находить производные функций.

Пояснение к работе

Теоретические сведения

Производной $y'(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для дифференцируемой функции с производной, отличной от нуля, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Таблица производных.		Правила дифференцирования.
1. $C' = 0;$	6. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$	I. $(u + v)' = u' + v';$
2. $x' = 1;$	7. $(\sin x)' = \cos x;$	II. $(uv)' = u'v + uv';$
3. $(Cu)' = C \cdot u';$	8. $(\cos x)' = -\sin x;$	III. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$
4. $(x^n)' = nx^{n-1};$	9. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	IV. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	10. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	

<u>Пример 1</u>.Найти производную функции

$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x.$

Решение.

$$y' = (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' = (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' =$$
$$= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x') = 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7.$$

<u>Пример 2</u>.Найти производную функции

$(2x-1)\sqrt{x}.$

Решение.

$$\left((2x-1)\sqrt{x}\right)' = (2x-1)'\sqrt{x} + (2x-1)\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 2\sqrt{x} + (2x-1) \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x + 2x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}.$$

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Ознакомиться с методическими рекомендациями по проведению практического занятия .
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Решить задачи в соответствии с заданием.
4. Выполненные задания покажите преподавателю. Возможен устный опрос.

Работа в кабинете

Вариант1.	Вариант2.	Вариант3.
1.Найти производные функций при данном значении аргумента:		
а)f(x)=x^3+3x^2-4x-5, x=2; б)f(x)=(x+1)$\sqrt{x-1}$, x=5;	а)f(x)=$2x^3+x^2+3x-5$, x=2; б) f(x)=(x-1)$\sqrt{x-1}$, x=10;	а)f(x)=x^3-5x^2-4x-1, x=2; б) f(x)=(x-1)$\sqrt{x+1}$, x=8;
2. Вычислить производные сложных функций:		
а) f(x)=$(5x^2-3)^5$; б) f(x)=$-2\sin(3x-1)$	а)f(x)= $(4x^2+5)^6$; б) f(x)=-6$\cos(5x-3)$	а)f(x)=$(7x^2=4)^5$; б) f(x)=-7$\cos(2x-3)$
3. Найти производные второго порядка:		
а) f(x)=$2x^7+3x^2$; б) f(x)=2 e^x +x^5+1	а) f(x)=$3x^{10}-5x^2$; б) f(x)=3 e^x +x^3+1	а) f(x)=$4x^8-2x$; б) f(x)=4 e^x +x^6+1
4.Найти производную обратной функции:		
а) f(x)=arcsin 25x	а) f(x)= arccos 25x	а) f(x)= arctg 25x
4. Составить и решить уравнение f(x) ′=g(x) ′:		
f(x) =$\ln 4x$, g(x)=10^x +1	f(x) =$\ln 3x$, g(x)=5^x -2	f(x) =$\ln 5x$,g(x)=10^x +5

Дополнительное задание.

Вычислить производные:

а) $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3}$;б) $f(x)=(x^3-1)(x^2+x+1)$; в) $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$.

Контрольные вопросы

1.Дать определение производной.

2. Правило нахождения производной сложной функции.

3. Как вычислить частное значение производной?

Содержание отчета

В тетради для практических занятий необходимо:

1) указать наименование занятия и его номер;
2) указать цель занятия;
3) указать порядок выполнения заданий;
4) оформить решение задач в тетради.

Общая схема построения графиков функций

15. Найти область определения функции.
16. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
17. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
18. Найти асимптоты графика функции.
19. Найти промежутки монотонности функции и ее экстремумы.
20. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
21. Построить график, используя полученные результаты исследования.

Пример

Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

Решение:

15. Функция определена на всей числовой оси, то есть $D(y) = R$.
16. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.
17. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x = 0$, получим $y = -3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.
18. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.
19. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Далее, имеем $(3x^2 - 12x + 9 = 0) \Leftrightarrow$ $(x^2 - 4x + 3 = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$ Точки $x = 1$ и $x = 3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$ и $3 < x < +\infty$ $y' > 0$, то есть функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y' < 0$, то есть функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(3) = -3$.
20. Найдем вторую производную: $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функция на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$, то есть в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < +\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получаем точку перегиба $(2; -1)$.
21. Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 1).

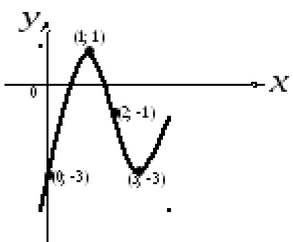


рис.1

Задания для самостоятельной работы

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1) $y = 2x^2 - 8x$; 2) $y = -3x^2 + 12x$;

3) $y = x^2 + 5x + 4$; 4) $y = -x^2 + 2x + 15$;

5) $y = x^3 - 3x$; 6) $y = 3x^3 - x$;

7) $y = -x^3 + x$; 8) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$;

9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$; 10) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

11) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; 12) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$.

Вопросы для самоконтроля:

11. Дайте определение возрастания и убывания функции.
12. Дайте определение экстремума функции.

13. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции?
14. Сформулируйте определение асимптоты. Перечислите основные виды асимптот.
15. Сформулируйте общую схему исследования функции для построения графика.

Практическое занятие: « Вычисление неопределенных интегралов»
Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Совокупность F(x) + C всех первообразных функций $f(x)$ на интервале $a< x <b$ называют *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $f(x)dx$ –подынтегральное выражение; $f(x)$ – подынтегральная функция; x – переменная интегрирования; C –произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x dx + C$

5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} = tgx + C$

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10. $\int e^x dx = e^x + C$

11. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

18. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

19. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Задания для практического занятия

Задание № 1. Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов.

1) $\int x^3 dx$ 2) $\int x^{11}dx$ 3) $\int 5dx$

4) $\int \frac{dx}{4}$ 5) $\int x\sqrt{2}dx$ 6) $\int \frac{2}{3}x^4 dx$

7) $\int \frac{dx}{x^5}$ 8) $\int (x-5e^x)dx$ 9) $\int (\frac{5}{x} + \sin x)dx$

10) $\int (2^x - 1)dx$ 11) $\int \frac{dx}{16+x^2}$ 12) $\int \frac{3a}{\cos^2 x}dx$

13) $\int (5x^4 - 7x^6 + 3)dx$

Задание № 2. Найти неопределенный интеграл

1. а) $\int(2-3e^x+x)dx$; б) $\int\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{x}}dx$.

2. а) $\int(3x^5-\cos x-1)dx$; б) $\int\frac{x^{-1/2}+2}{\sqrt{x}}dx$.

3. а) $\int(7x^6-\sin x+3)dx$; б) $\int\frac{5-\sqrt[3]{x^2}}{x}dx$.

Типовые задания

Пример 1. Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов

1) $\int(x+3)(x-2)dx$

Решение. $\int(x+3)(x-2)dx=\int(x^2+x-6)dx==\int x^2dx+\int xdx-6\int dx=\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+C$

2) $\int\frac{3a+1}{ax^3}dx$

Решение. $\int\frac{3a+1}{ax^3}dx=\frac{3a+1}{a}\int\frac{1}{x^3}dx=\frac{3a+1}{a}\int x^{-3}dx=\frac{3a+1}{a}\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{3a+1}{a}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{3a+1}{ax^2}+C$

3) $\int x\sqrt[5]{x^3}dx$

Решение.

$$\int x\sqrt[5]{x^3}dx=\int x\cdot x^{\frac{3}{5}}dx=\int x^{\frac{8}{5}}dx=\frac{x^{\frac{8}{5}+1}}{\frac{8}{5}+1}+C=\frac{x^{\frac{13}{5}}}{\frac{13}{5}}+C=\frac{5}{13}x^2\cdot x^{\frac{3}{5}}+C=\frac{5}{13}x^2\sqrt[5]{x^3}+C$$

Пример 2. Найти интеграл

1) $\int\frac{3dx}{x^7}$.

Решение. Воспользуемся определением степени с отрицательным показателем ($a^{-n}=1/a^n$, a□□0) и найдем неопределенный интеграл от степени $\int\frac{3dx}{x^7}=\int 3x^{-7}dx=\frac{3x^{-6}}{-6}=-\frac{1}{2x^6}$.

2) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2dx$

Решение. Раскроем скобки по формуле $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$и неопределенный интеграл от полученной алгебраической суммы функций заменим такой же алгебраической суммой неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2dx=\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=$$

$$=x-2\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-3}}{-3}+C=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример вычисления 1: С развернутым оформлением

Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение:

Введем новую переменную $t = 3x\text{-}4$, тогда $dt = t' \cdot dx = (3x-4)' \cdot dx = 3dx$, откуда $dx = \frac{dt}{3}$.

Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения $3x\text{-}4$ подставим t, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{12} + C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо t подставим выражение $3x\text{-}4$), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx = \frac{(3x-4)^4}{12} + C$$

Пример вычисления 2*:*

С кратким оформлением

Решение:

$$\int sinx cosx dx = \left| \begin{matrix} t = sinx \\ dt = cosx dx \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} sin^2 x + C.$$

Задания для практической работы:

Вариант 1

Вычислите интегралы

1. $\int (2x+1)^4 \, dx$

2. $\int cos^8 x \cdot sinx \cdot dx$

Вариант 2.

Вычислите интегралы

1. $\int (3x-4)^3 \, dx$

2. $\int sin^6 x \cdot sinx \cdot dx$

Практическая работа «Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли»

Цель работы: уметь вычислять определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница и вычислять криволинейную трапецию, вычислять площади фигур, вычислять определённый интеграл методом подстановки, привить навыки вычисления определённого интеграла по частям.

Содержание работы:
Определенный интеграл вычисляется по следующей формуле:
Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

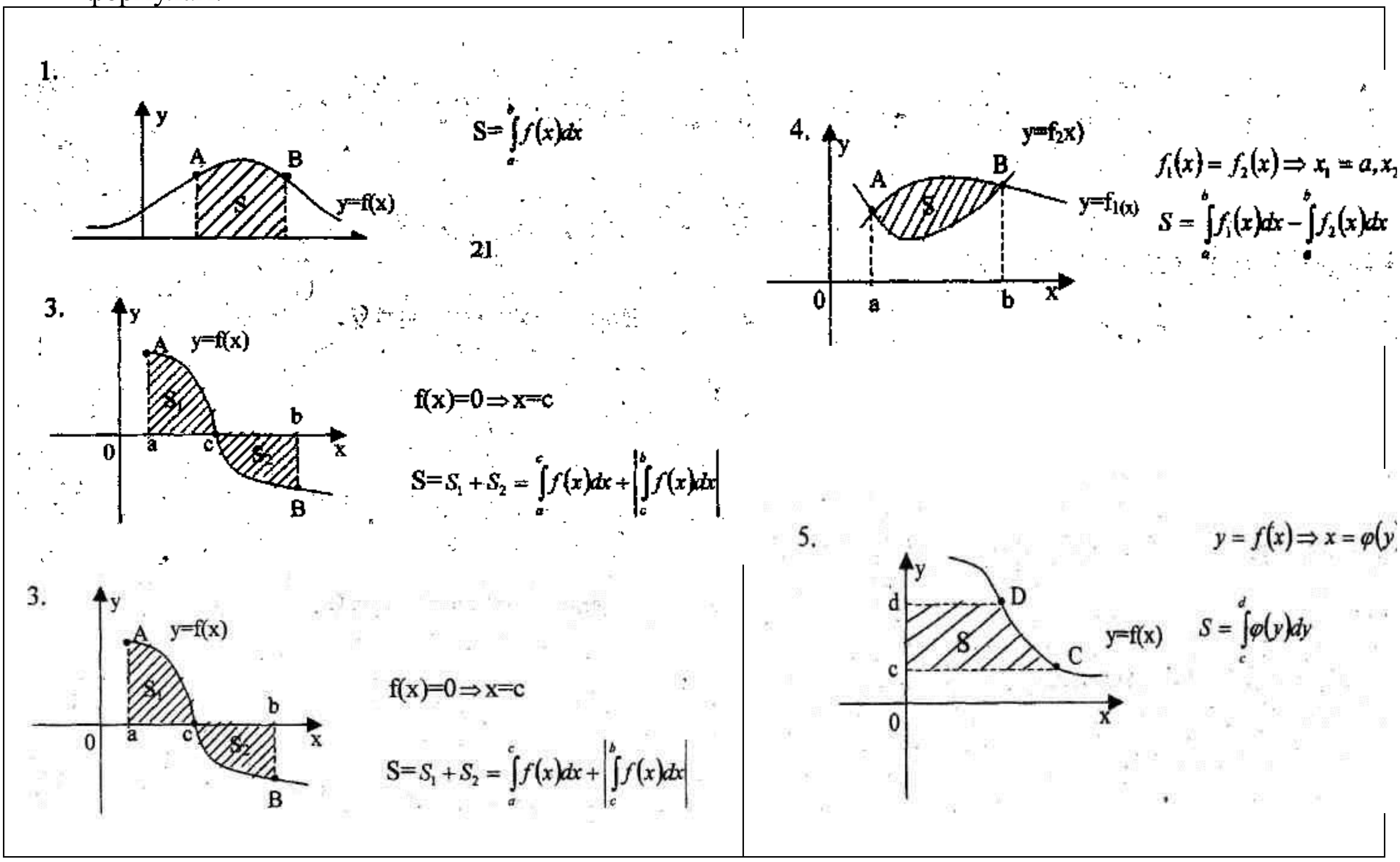
Пример вычислений 1:

$$\int_1^3 \left(x^3 - 5\right)dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 5x\Bigg|_1^3 = \frac{x^4}{4} - 5x\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 5\cdot 3\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 5\cdot 1\right) =$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 15\right) - \left(\frac{1}{4} - 5\right) = \frac{81}{4} - 15 - \frac{1}{4} + 5 = \frac{81-1}{4} - 10 = \frac{80}{4} - 10 = 20 - 10 = 10$$

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ох, слева и справа – прямыми x = a и x = b

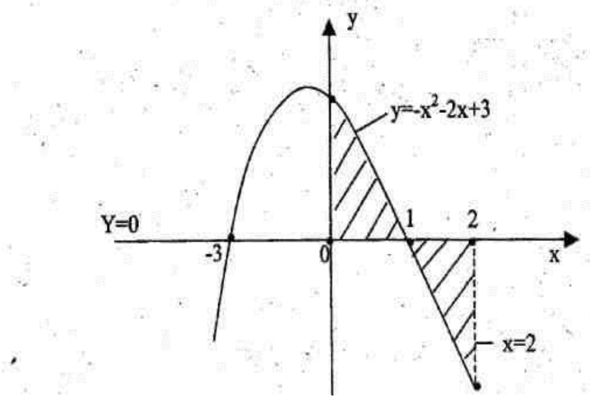
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y=f(x)*, двумя прямыми *x=a* и *x=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:



<u>Пример вычислений 2:</u> Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой *x=2*. Решение: Построим данные линии

Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: $y=-x^2-2x+3$, $-x^2-2x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=-3$

$$S=\int_0^1 (-x^2-2x+3)dx - \int_1^2 (-x^2-2x+3)dx = \left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Bigg|_1^2 =$$



$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - (-\frac{8}{3} - 4 + 6) + (-\frac{1}{3} - 1 + 3) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4(\textit{кв.ед.})$$

Задания для практической работы:

Вариант 1	*Вариант 2*	*Вариант 3*
Вычислите определенный интеграл	***Вычислите определенный интеграл***	***Вычислите определенный интеграл***
$\int_1^3 (4x^3 + 2)dx$	$\int_0^2 \left(x^2 - 3\right)dx$	$\int_{-1}^2 \left(3x^2 - 2x\right)dx$
Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями***	***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями***
$y = x^2 + 4x$, прямой $x=3$ и осями координат	$y = 2 - x^2$, прямой $x=-1$ и осями координат	$y = 4x - x^2$, прямой $x=1$ и осями координат

Краткие теоретические сведения к практическому занятию

Вычисление определенного интеграла методом замены переменной состоит в следующем:

1) часть подынтегральной функции заменить новой переменной;
2) найти новые пределы определенного интеграла;
3) найти дифференциал от обеих частей замены;
4) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
5) вычислить полученный определенный интеграл.

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
, где $\alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b)$.

Типовые задания

Пример 1.Вычислить интеграл $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$

Решение. Введем подстановку $t = 8 - x$, тогда $-dx = dt$, $dx = -dt$. Определим пределы интегрирования для переменной t. При $x = 0$ получаем $\alpha = t(0) = 8 - 0 = 8$, при $x = 7$ получаем $\beta = t(7) = 8 - 7 = 1$.

Выразив подынтегральное выражение через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \int\limits_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int\limits_8^1 t^{-1/3}dt = \int\limits_1^8 t^{-1/3}dt = \frac{t^{2/3}}{2/3}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64}-1\right) =$$
$$= \frac{3}{2}(4-1) = \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x dx$

Решение. Положим $\cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$ и $\sin x dx = -dt$. Определим пределы интегрирования для переменной t: $\alpha = t(0) = \cos 0 = 1$, $\beta = t(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$.

Выразив подынтегральное выражение через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x dx = \int\limits_1^0 \sqrt{1}(-dt) = -\int\limits_1^0 t^{1/2}dt = \int\limits_0^1 t^{1/2}dt = \frac{t^{1/2+1}}{1/2+1}\Bigg|_0^1 = \frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 =$$
$$= \frac{2}{3}t^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{(x^3+2)^2}$

Решение. Произведем подстановку $x^3 + 2 = t$, тогда $3x^2dx = dt$, $x^2dx = dt/3$. Определим пределы интегрирования для переменной t. При $x = 1$ получаем $\alpha = t(1) = 1^3 + 2 = 3$, при $x = 2$ получаем $\beta = t(2) = 2^3 + 2 = 10$.

Выразив подынтегральное выражение через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{(x^2+2)^2} = \int\limits_3^{10} \frac{\frac{1}{3}dt}{t^2} = \frac{1}{3}\int\limits_3^{10} t^{-2}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_3^{10} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\Bigg|_3^{10} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{30}\right) = \frac{7}{90}.$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^e x dx = \frac{e}{2}ln\,e - \frac{1}{2}ln1 + \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^e = \frac{e}{2} + \frac{e^2-0^2}{2} = \frac{e^2+e}{2}.$$

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x dx$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos x dx=\left|\begin{array}{c} u=x+1\\ du=dx\\ dv=\cos x dx\\ v=\sin x\end{array}\right|=(x+1)\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=(\frac{\pi}{2}+1)\cdot 1-0+$$

$$+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}+1+0-1=\pi/2.$$

Задание № 1. Вычислите следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_4^5 (4-x)^3 dx$ 2) $\int_{-2}^{1}(5-2x)^2 dx$ 3) $\int_2^3 (2x-1)^2 dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3-\cos x}dx$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos x dx$ 8) $\int_0^1 e^{x^2} x dx$ 9) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 3e^{x^3} x^2 dx$

Задание № 2. Найти интегралы методом интегрирования по частям:

1 $\int_0^1 \arcsin x dx;$ 2 $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x-9)};$ 3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx;$ 5 $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg} x dx;$ 6 $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx;$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Интернет-ресурсы:

1) Единая Университетская библиотека. Код доступа https://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red

2) Математический портал по высшей математике с подборкой материалов к занятиям и контрольным работам. Код доступа http://mathportal.net/

3) Формулы, уравнения, теоремы, примеры решения задач. http://matematika.electrichelp.ru/matricy-i-opredeliteli/