Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение   
Чувашской Республики

«Чебоксарский экономико-технологический колледж»   
Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ самостоятельной работЫ**

**ЕН.01. МАТЕМАТИКА**

специальность

среднего профессионального образования

**19.02.03 Технология хлеба, кондитерских и макаронных изделий**

Разработчик:

Григорьева М.Г., преподаватель

Чебоксары 2022

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Пояснительная записка ……………………………………………… 2. Основная часть ………………………………………………………   2.1. Тематическое планирование самостоятельных работ  2.2. Задания к самостоятельной работе студентов ……………………  Тема 1. Производная функции. Дифференциал функции и его приложение.  Тема 2. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. …  Тема 3. Определенный интеграл и его свойства. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. ………………………  Тема 4. Дифференциальные уравнения I порядка. Линейные дифференциальные уравнения I порядка. ………………………………  Тема 5. Дифференциальные уравнения II порядка c постоянными коэффициентами.  Тема 6. Основные понятия комбинаторики.  Тема 7. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Элементы математической статистики.  Список литературы | 4  5  6  8  11  15  16  18  20  24 |

1. **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Целью данных методических рекомендаций является организация преподавателем эффективной внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине ЕН.01. Математика как средства, способствующего повышению качества образовательного процесса.

Задачи:

1. сформировать общие и профессиональные компетенции во внеаудиторной работе через содержание представленных методических рекомендаций;
2. помочь преподавателю в подборе материала, предлагаемого студентам для внеаудиторной работы с целью закрепления и углубления знаний;
3. рационально организовать внеаудиторную самостоятельную работу студентов через распределение времени, затраченного на ее выполнение, предложенную форму контроля их знаний, критерии оценок.

Внеаудиторная работа является одним из видов учебных занятий студентов, выполняемых под руководством преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основные цели внеаудиторной (самостоятельной) работы:

* систематизация и закрепление знаний и практических умений студентов, полученных при изучении на занятии;
* углубление и расширение теоретических знаний, формирование умений использовать справочную документацию и дополнительную литературу;
* развитие познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
* формирование самостоятельного мышления;
* развитие исследовательских умений.

В начале учебного года (на первом учебном занятии) преподаватель знакомит студентов со структурой построения всего курса дисциплины ЕН.01. Математика, в которую должна быть органично вписана самостоятельная работа. Каждый студент после такого занятия должен понимать, сколько самостоятельных работ ему предстоит выполнить в период изучения дисциплины и, каким образом он будет отчитываться перед преподавателем. Можно составить таблицу, по которой студенту легко будет ориентироваться по темам курса, видам самостоятельных работ, срокам выполнения, критериям оценивания.

Рекомендуется ведение студентом отдельной тетради для выполнения всех предусмотренных рабочей программой самостоятельных работ.

Любая самостоятельная работа дается на определенный срок, с указанием времени, затрачиваемым на ее выполнение, и определением срока представления выполненного задания. Если работа выполнена не в срок, то она оценивается меньшим количеством баллов. Возможно установление срока выполнения задания в зависимости от индивидуальных особенностей студента.

**Критериями оценки результатов самостоятельной работы студентов являются**:

* уровень усвоения студентом учебного материала;
* умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
* сформированность общеучебных умений;
* обоснованность и четкость изложения материала;
* уровень оформления работы.

На самостоятельную работу в курсе изучения дисциплины отводится 24 часа. Методические рекомендации помогут студентам целенаправленно изучать материал по теме, определять свой уровень знаний и умений при выполнении самостоятельной работы.

1. **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

**2.1. Тематическое планирование внеаудиторных работ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Тема №*** | ***Вид работы*** | ***Методы контроля*** | ***кол-во***  ***часов*** |
| Тема 1. Производная функции. Дифференциал функции и его приложение. | - Решение задач. Вычисление производных функций.  - Решение задач по теме: Приложение дифференциала к приближённым вычислениям.  - Поиск информации на сайтах Интернета: Применение производных и дифференциала. | Проверка работы  Доклад на занятии | 3  1 |
| Тема 2. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. | - Решение задач по теме: Вычисление интегралов различными методами.  - Записать таблицу основных интегралов. | Проверка работы | 4 |
| Тема 3. Определенный интеграл и его свойства. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. | - Решение задач: Вычисление определённых интегралов различными методами.  - Поиск информации на сайтах Интернета: Применение интеграла к решению физических и технических задач. | Проверка работы  Доклад на занятии | 2  2 |
| Тема 4. Дифференциальные уравнения I порядка. Линейные дифференциальные уравнения I порядка. | - Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.  - Нахождение общего и частного решения дифференциальных уравнений.  - Поиск информации на сайтах Интернета: Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. | Проверка работы  Доклад на занятии | 3  1 |
| Тема 5. Дифференциальные уравнения II порядка c постоянными коэффициентами. | - Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. | Проверка работы | 2 |
| Тема 6. Основные понятия комбинаторики. | - Решение задач комбинаторики. Вычисление вероятности события. | Проверка работы | 2 |
| Тема 7. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Элементы математической статистики. | - Решение задач: Оценка неизвестной вероятности случайного события. Оценка неизвестного закона распределения случайной величины.  - Поиск информации на сайтах Интернета: Роль математической статистики при планировании и организации производства. | Проверка работы  Доклад на занятии | 2  2 |
| ***ИТОГО*** | | | ***24*** |

## 2.2. Задания к самостоятельной работе студентов

###### Тема 1. Производная функции. Дифференциал функции и его приложение.

**Цель:** закрепить навыки вычисления производных функций разных порядков, использования дифференциала для приближённых вычислений.

**Самостоятельная работа:** решение задач, поиск информации на сайтах Интернета «Применение производных и дифференциала»

**Форма контроля:** проверка работы, доклад на занятии.

**Требования к докладу:**

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно;

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

**Краткие теоретические сведения**

*Правила дифференцирования*

Если у функций *u*(*x)* и *v(x)* существуют производные, то

1. (*u ± v*)ʹ = *uʹ ±* *vʹ*

2. (*cu*)ʹ = *cu*ʹ, где *c* = const

3. (*uv*)ʹ = *uʹv +* *uvʹ*

4.



*Производная сложной функции*

Пусть функция *y* *f* (*u*), *u* *g*(*x*) и *y* *f* (*g*(*x*)) - сложная функция.

Теорема. Если *y* есть дифференцируемая функция от *u*, а *u* есть дифференцируемая функция от *x*, то   
1) *y* есть дифференцируемая функция по *x*,   
2) производная *y* по *x* равна произведению производной *y* по *u* на производную *u* по *x*, т.е., если *y* = *f* (*u*), а *u* = *g*(*x*) => *f ʹ*(*x*) = *f ʹ*(*u*) ∙ *gʹ* (*x*).

**Типовые задания**

*Задание № 1* Найти производные элементарных функций: 1) *f*(*x*) = 2*x*3 –3*x*4 + 19  
2) 3) *f*(*x*) = *x*2 –1/*x* + (*x* – *ex*)(*x* + 2)3

*Решение*.

1)



2) Находим производную частного



3)



*Задание № 2.* Найти производные следующих сложных функций.

1) *y =* (*x*2 *–* 5*x +* 8)6 2)  3) *y =* ln3 5*x*2

*Решение*.



2) Находим производную частного



3)



*Задание № 3*. Вычислите производную при заданном значении аргумента:

*y =* sin(4*x* – π/6) в точке *x*0 = π/12.

*Решение*. Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:



Ответ: 2.



*Задание № 4*. Материальная точка движется по закону *S =* 2*t*3 *+* 3*t*, где S измеряется в метрах, *t* – в секундах. Найти значение *t*, при котором ускорение точки равно 12.

*Решение***.** Найдем ускорение материальной точки:

*a*(*t*) = *Sʹʹ*(*t*) = (2*t*3 + 3*t*)ʹʹ = ((2*t*3 + 3*t*)ʹ)ʹ = ((2*t*3)ʹ + (3*t*)ʹ)ʹ = (2∙3*t*2 + 3∙1)ʹ = (6*t*2 + 3)ʹ = (6*t*2)ʹ + (3)ʹ = 6∙(*t*2)ʹ + 0 = 6∙2*t* = 12*t*

Искомое время *t* найдём из уравнения *a*(*t*) = 12 => 12*t* = 12 => *t* = 1c.

Ответ: *t* = 1c.

*Задание № 5*. Вычислить приближенно , заменяя приращения функции ее дифференциалом.



*Решение*. Необходимо составить функцию *f*(*x*). По условию предложено вычислить кубический корень из числа 67, поэтому соответствующая функция имеет вид *f*(*x*) = . Нужно с помощью формулы найти приближенное значение *f*(67) = .



= 4, 67 = 64 + 3, *x*0 = 64, Δ*x* = 3



=>



Ответ: 4,0625.

**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.2 п.2.1.7-2.1.8 № 98-120

(2) Гл.5 п.5.2 № 5.41-5.56.

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно, в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если: допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

###### Тема 2. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

**Цель:** закрепить умения интегрировать функцию, используя таблицу основных интегралов, метод подстановки, метод интегрирования по частям.

**Самостоятельная работа:** решение задач.

**Форма контроля:** проверка работы.

**Краткие теоретические сведения**

*Непосредственное интегрирование.*

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведения в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

*Интегрирование методом подстановки.*

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;

2) найти дифференциал от обеих частей замены;

3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);

4) найти полученный табличный интеграл;

5) сделать обратную замену.

*Формула замены переменной*

111

или наоборот, *t* = *φ*(*x*),



*Интегрирование по частям*

Если производные функций *u = u*(*x*) и *v = v* (*x*) непрерывны, то справедлива формула ∫*udv* = *uv –* ∫*vdu*, называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве *u*(*x*) обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Если в результате применения метода интегрирования по частям в правой части получается интеграл сложнее исходного, необходимо заново применить этот метод, разбив подынтегральное выражение на другие два множителя *u* и *dv*, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части.

*Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям*

(способ выбора множителей *u* и *dv*)







*Pn*(*x*) – многочлен от *x* степени *n*, т.е. *Pn*(*x*) = *a*0*xn + a*1*xn –*1 + … + *an*, где *a*0 ≠ 0.

**Типовые задания**

*Задание № 1*. Найти неопределенный интеграл, пользуясь таблицей основных интегралов

1) ∫(*x +*3)(*x* –2)*dx* 2)  3) 

*Решение*.

1)



2)



3)



*Задание № 2*. Найти интеграл 1) 2)



*Решение*.

1) Воспользуемся определением степени с отрицательным показателем (*а*–*n* =1/*аn*, *а* 0) и найдем неопределенный интеграл от степени = = .



2) Раскроем скобки по формуле (*а*–*b*)2 = *a*2 – 2*ab + b*2и неопределенный интеграл от полученной алгебраической суммы функций заменим такой же алгебраической суммой неопределенных интегралов от каждой функции:



*Задание № 3*. Найти неопределенный интеграл 

*Решение*.





*Задание № 4*. Проинтегрировать по частям: 

*Решение*. 

**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.2 п.2.1.11. № 187-206

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно, в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок, в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

###### Тема 3. Определенный интеграл и его свойства. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

**Цель:** закрепить навыки по вычислению определённых интегралов различными способами.

**Самостоятельная работа:** решение задач (в том числе с построением графиков), поиск информации на сайтах Интернета «Применение интеграла к решению физических и технических задач»

**Форма контроля:** проверка работы, доклад на занятии.

**Требования к докладу:**

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно;

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

**Краткие теоретические сведения**

Определенный интеграл**http://www.vevivi.ru/best/images/servus/80/45/4884580.png**от неотрицательной функции http://www.vevivi.ru/best/images/servus/59/45/4884559.png с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции http://www.vevivi.ru/best/images/servus/59/45/4884559.png, слева и справа – отрезками прямых *х* = *а*, *х* = *b*, снизу отрезком [*a*; *b*] *Ох*

Фигура, ограниченная кривой *у = f (x)*, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*. Отрезок [*a*;*b*] называется основанием криволинейной трапеции. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках *а – г.*

Площадь фигуры, ограниченной кривой *у = f (x)*, где *f (x) > 0*, осью *ОХ* и двумя прямыми *х = а и х = b*, выражается определенным интегралом:



*Формула прямоугольников с недостатком*



*Формула прямоугольников с избытком*



*Формула трапеций*



**Типовые задания**

*Задание № 1.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами *y =* 4 – *x*2 и   
*y = x*2 – 2*x*.

*Решение.*

S = 9 кв.ед.

*Задание № 2.* Вычислить интеграл 

*Решение*. Введем подстановку *t =* 8 –*x*, тогда – *dx = dt, dx = – dt.* Определим пределы интегрирования для переменной *t.* При *x* = 0 получаем α = *t*(0) = 8 – 0 = 8, при *x* = 7 получаем β = *t*(7) = 8 – 7 = 1.

Выразив подынтегральное выражение через t и *dt* и перейдя к новым пределам, получим





*Задание 3*. Вычислить интеграл 

*Решение*. Положим cos *x* = *t*, тогда – sin *x* *dx* = *dt* и sin *x* *dx* = –*dt*. Определим пределы интегрирования для переменной *t*: α = *t*(0) = cos 0 = 1, β = *t* (π/2) = соs (π/2) = 0.

Выразив подынтегральное выражение через *t* и *dt* и перейдя к новым пределам, получим

*Задание № 4*. Найти интеграл  методом интегрирования по частям

*Решение*.

+ + 1 + 0 – 1 = π/2.

*Задание № 5*. Вычислить определенный интеграл  методом прямоугольников и трапеций, разбив отрезок интегрирования на 6 равных частей. Сравнить приближённые результаты с точным.

*Решение*. *a* = 2, *b* = 5, *n* = 6, *f*(*x*) = *x*2.

Шаг Δ*x* = (*b – a*)/*n* = (5 – 2)/6 = 0,5

*x*0 = *a* = 2, *y*0 = *x*02 = 4

*x*1 = *x*0 + Δ*x* = 2,5, *y*1 = *x*12 = 6,25

*x*2 = *x*1 + Δ*x* = 3, *y*2 = *x*22 = 9

*x*3 = 3,5, *y*3 = 12,25

*x*4 = 4, *y*4 = 16

*x*5 = 4,5, *y*5 = 20,25

*x*6 = *b* = 5, *y*6 =25

По формуле прямоугольников с недостатком:

 = 0,5(4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25) = 33,875.

По формуле прямоугольников с избытком:

 = 0,5(6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25 + 25) = 44,375.

По формуле трапеций: 0,5((4 + 25)/2 +6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25) =39,125.

Точный результат: = 125/3 – 8/3 =39.

**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.2 п.2.1.12. № 216, 217, 224-235, 243, 244, Гл.3 п.3.1.1-3.1.2 № 8-10.

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится при сданной в срок работе, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно, верно построен график функции при нахождении площади фигуры.

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, верно построен график функции при нахождении площади фигуры, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

###### Тема 4. Дифференциальные уравнения I порядка. Линейные дифференциальные уравнения I порядка.

**Цель:** отработка умений и навыков решения дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными, нахождения частного решения по известным начальным условиям.

**Самостоятельная работа:** Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными; нахождение общего и частного решения дифференциальных уравнений; поиск информации на сайтах Интернета «Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям»

**Форма контроля:** проверка работы, доклад на занятии.

**Требования к докладу:**

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно.

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

**Краткие теоретические сведения**

Задача нахождения частного решения *y = y*(*x*), удовлетворяющего начальным условиям, называется *задачей* *Коши*.

*Частным* *решением* дифференциального уравнения называется решение, получаемое из общего решения при каком-либо определённом значении произвольной постоянной C. Для нахождения частных решений задают *дополнительные условия*. Эти условия называют *начальными*, если все они относятся к одному и тому же значению независимой переменной. *Начальные условия*, или *условия Коши*, задают значение функции *y*0 в фиксированной точке *x*0.

**Типовые задания**

*Задание 1*. Найти общее решение дифференциального уравнения *yyʹ + x =*0 методом разделения переменных.

*Решение*.

*ydy*/*dx =* – *x => ydy =* – *x dx*



*y*2/2 = – *x*2/2 + C

*y*2 = – *x*2 + 2C – общее решение дифференциального уравнения.

Ответ: *y*2 = – *x*2 + 2C.

*Задание 2*. Найти частное решение дифференциального уравнения2*yyʹ – x =* 0, если *y =*–2 при *x* = 6.

*Решение*. 2*ydy*/*dx = x =>* 2*ydy = x dx*



*y*2 = *x*2/2 + C – общее решение дифференциального уравнения

Подставим в общее решение начальные условия

(–2)2 = 62/2 + C => С = –14

*y*2 =  –14 – частное решение.

Ответ: *y*2 =  –14.

**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.2 п.2.2.1.–2.2.3., № 252-267, 278, 279.

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится при сданной в срок работе, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно.

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

**Тема 5. Дифференциальные уравнения II порядка   
c постоянными коэффициентами.**

**Цель:** закрепить навыки решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

**Самостоятельная работа:** Решение дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

**Форма контроля:** проверка работы

**Краткие теоретические сведения**

Уравнение вида *y*ʹʹ + p*yʹ* + q*y* = *f*(*x*), где p и q – вещественные числа (постоянные величины), *f*(*x*) – непрерывная функция, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

*y*ʹʹ + p*yʹ* + q*y* = 0 – называется *однородным*.

*y* = 1, *yʹ* = k, *y*ʹʹ = k2 ⇒ k2 + pk + q = 0 – *характеристическое уравнение* дифференциального уравнения.

1) k1 ≠ k2 – действительные и различные, общий интеграл имеет вид: , где С1, С2 – произвольные постоянные;

2) k1 = k2 = k – действительные и равные, общий интеграл имеет вид: ;

3) k1,2 = *a* ± *bi* – комплексные, общий интеграл имеет вид:

.

**Типовые задания**

*Задание № 1*. Найти общее решение дифференциального уравнения *yʹʹ* + 8*yʹ* + 25*y* = 0.

*Решение*.

k2 + 8k + 25 = 0 – характеристическое уравнение

D = 64 – 100 = –36, k1,2 = – 4 ± 3*i*

*y = e*– 4*x*(C1cos3*x* + C2sin3*x*) – общее решение уравнения

Ответ: *y = e*– 4*x*(C1cos3*x* + C2sin3*x*).

*Задание № 2*. Найти частное решение дифференциального уравнения 2*yʹʹ* – 5*yʹ* + 2*y* = 0 при *у*(0) = 1, *у'*(0) = 0.

*Решение*.

2k2 – 5k + 2 = 0 – характеристическое уравнение

D = 25 – 16 = 9, k1,2 = 2; 0,5

*y =* C1*e*2*x* + C2*e*0,5*x* – общее решение уравнения

Частное решение:

 ⇒ 

Ответ: .

**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.2 п.2.2.4.–2.2.5., № 280-290.

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится при сданной в срок работе, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно.

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

**Тема 6. Основные понятия комбинаторики.**

**Цель:** закрепить навыки решения комбинаторных задач, вычисления вероятности событий, научить применять вероятностные методы для решения практических задач.

**Самостоятельная работа:** решение задач комбинаторики, вычисление вероятности события.

**Форма контроля:** проверка работы

**Краткие теоретические сведения**

*n-факториал n*! = 1∙2∙3∙…∙(*n* – 1)∙*n*.

*Размещения*  

*Перестановки* P*n*=*n*!

*Сочетания* 

*Сочетания с повторениями* – это такие соединения, состоящие из n-различных элементов по m-элементам, отличающиеся друг от друга или хотя бы одним элементом или тем, что хотя бы один элемент входит различное число раз.



Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов *m*, благоприятствующих событию А, к числу *n* всех исходов испытания. Р(А) = *m / n*

События А и В называются *совместными*, если они могут одновременно произойти, и *несовместными*, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

Вероятность суммы двух совместных событий: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)–Р(АВ).

Вероятность суммы двух несовместных событий: Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)∙Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)∙Р(В/А).

Р(АВ)=Р(А)∙Р(В) – для независимых событий А и В.

*Формула полной вероятности.*

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий Н1, Н2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле Р(А) = Р(Н1)∙Р(А / Н1) + Р(Н2)∙Р(А / Н2) + Р(Н3)∙Р(А / Н3) +…

*Формула Байеса:* , P(A) ≠ 0

**Типовые задания**

*Задание № 1*. Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

*Решение*.Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность P = 11/34.

Ответ: 11/34.

*Задание № 2*. В урне находится 10 шаров, из них 6 белых и 4 черных шара. Вынули из урны 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?

*Решение*. Рассмотрим событие А – оба вынутых шара белого цвета. Число всевозможных исходов равно количеству выборок 2 шаров из 10. Выборка без возвращения и без повторения, поэтому *n* == 45. Число исходов, благоприятствующих наступлению события А равно числу вариантов извлечения 2 белых шаров из 6, поэтому *m* == 15. Тогда P(A) = 15/45 = 1/3 ≈ 0,33. Ответ: P(A) ≈ 0,33.

*Задание № 3*. В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки различны?

*Решение*. Пусть событие А – все проданные открытки различны.

Тогда число всевозможных исходов равно числу вариантов выбора 4 открыток. Эта выборка с возвращением (выбранные открытки могут быть одинаковые), неупорядоченная (так как важен лишь состав выборки, а не то, в каком порядке отобраны открытки). Значит *n*== 126 ().

Число исходов, благоприятствующих наступлению события А, есть число способов, которыми можно выбрать 4 различные открытки из 6 видов. Так как открытки теперь различны, то эта неупорядоченная выборка без повторения, значит *m* == 15

Тогда P(A) = 5/42 ≈ 0,12. Ответ: P(A) ≈ 0,12.

*Задание № 4*. Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

*Решение*. Т.к. события совместны, то P =0,7 +0,8 –0,7∙0,8 = 1,5 – 0,56 = 0,94

*Задание № 5*. В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

*Решение*. Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

*n*1 = 10, *m*1= 4, P1=0,4,  *n*2= 10, *m*2 =3,P2 =0,3

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: P = P1∙P2 = 0,4∙0,3 = 0,12.

*Задание № 6.* Для того чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее 2 бомб. Сбросили 3 бомбы с вероятностями попадания 0,1, 0,3, 0,4. Найти вероятность разрушения моста.

*Решение*. Пусть события A,B, состоят в попадании 1,2,3 бомбы соответственно. Тогда разрушение моста соответствует событию *ABC* . В силу того, что слагаемые в этой формуле попарно несовместны, а сомножители в слагаемых независимы, искомая вероятность равна

(0,1)(0,3)(0,4)+ (0,1)(0,3)(0,6)+ (0,1)(0,7)(0,4)+ (0,9)(0,3)(0,4) = 0,166.

*Задание № 7*. Первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

*Решение*: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время. Тогда, пусть Н1 – лампа из первой партии, Н2 – лампа из второй партии и Н3 – лампа из третьей партии. Тогда событие А/Н1 – лампа из первой партии проработает заданное время, А/Н2 – лампа из второй партии проработает заданное время и А/Н3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

*n =* 20 + 30 + 50 = 100

P(Н1) = 20/100 = 0,2, P(A/Н1) = 0,7

P(Н2) = 30/100 = 0,3, P(A/Н2) = 0,8

P(Н3) = 50/100 = 0,5, P(A/Н3) = 0,9

P(A) = Р(Н1)∙Р(А / Н1) + Р(Н2)∙Р(А / Н2) + Р(Н3)∙Р(А / Н3) = 0,2∙0,7 + 0,3∙0,8 + 0,5∙0,9 =   
0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии P(Н1/ A) = = 0,2∙0,7/0,83 ≈ 0,169.

Ответ: ≈ 0,169.

*Задание № 8*. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение. Пусть событие А – извлекается белый шар. Тогда, пусть Н1 – шар из первой урны, Н2 – шар из второй урны и Н3 – шар из третьей урны. Тогда событие А/Н1 – белый шар из первой урны, А/Н2 – белый шар из второй урны и А/Н3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

P(Н1) = 1/3, P(A/Н1) = 5/12

P(Н2) = 1/3, P(A/Н2) = 1

P(Н3) = 1/3, P(A/Н3) = 0

P(A) = Р(Н1)∙Р(А/Н1) + Р(Н2)∙Р(А/Н2) + Р(Н3)∙Р(А/Н3)=

**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.4, п. 4.1.1-4.1.6, № 1-40.

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится при сданной в срок работе, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно.

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

**Тема 7. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Элементы математической статистики.**

**Цель:** закрепить навыки решения задач на нахождение закона распределения случайной величины, функции распределения, числовых характеристик случайной величины.

**Самостоятельная работа:** решение задач, Поиск информации на сайтах Интернета «Роль математической статистики при планировании и организации производства»

**Форма контроля:** проверка работы, доклад на занятии.

**Требования к докладу:**

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно.

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

**Краткие теоретические сведения**

Табличное задание закона распределения ДСВ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X | *x*1 | *x*2 | … | *xn* |
| P | *p*1 | *p*2 | … | *pт* |

где первая строка указывает возможные значения, а вторая – их вероятности   
(*p*1 + *p*2 + … + *pт* = 1). Эта таблица называется *рядом* *распределения*.

*Функцией* *распределения* случайной величины Х (обозначается F(*x*)) называется функция, определяемая соотношением F(*x*) = P(X < *x*).

*Биномиальный закон распределения* (формула Бернулли)

Пусть производится *n* независимых испытаний, и в каждом из них событие A может либо появиться, либо не появиться. Пусть также вероятность *p* появления события A в каждом испытании постоянна. *Pn*(*k*) = , где *q =*1 – *p* – вероятность противоположного события.

*Закон распределение Пуассона вероятностей массовых и редких событий*

(для случая малых *p* и больших значений *n*) *Pn*(*k*) = 

Математическое ожидание ДСВ Х: M(X) = .

*Дисперсия* ДСВ Х: D(X) = M(X – M(X))2 = 

*Среднее квадратическое отклонение* случайной величины Х: Ϭ(X) = 

**Типовые задания**

*Задание № 1*. Найти функцию распределения F(*х*) и начертить ее график, если дискретная случайная величина Х задана законом распределения

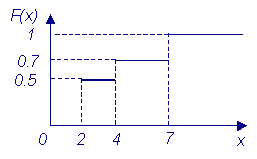
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 2 | 4 | 7 |
| Р | 0,5 | 0,2 | 0,3 |

*Решение*. Если х≤2, то F(*х*)=0. Действительно, значений, меньших числа 2, величина Х не принимает. Следовательно, при х≤2 функция F(*х*)=0.

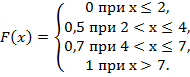
Если 2 < *x*≤ 4, то F(*х*)=0,5. Действительно, Х может принять значение 2 с вероятностью 0,5.

Если 4 < x ≤ 7, то F(*х*)=0,7. Действительно, Х может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,2; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, Х может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью 0,5+0,2=0,7.

Если *х* > 7, то F(*х*)=1. Действительно, событие х ≤ 7 достоверно и вероятность = 1.



Итак, искомая функция распределения имеет вид:



*Задание № 2*. Приживаемость саженцев яблонь составляет 80%. Наудачу выбирают 5 саженцев. Составить закон распределения числа прижившихся саженцев, функцию распределения, построить многоугольник распределения и график функции распределения.

*Решение*. Вероятность приживаемости яблони равна 0,8.

Х – случайная величина числа прижившихся яблонь из пяти саженцев, возможные значения:

*х*1 = 0 – ни один саженец не прижился;

*х*2 = 1 – один саженец прижился;

*х*3 = 2 – два прижились;

*х*4 = 3 – три;

*х*5 = 4 – четыре;

*х*6 = 5 – пять саженцев прижились.

Вероятности этих значений вычислим по формуле Бернулли:



Таким образом, закон распределения случайной величины:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| P(X) | 0,00032 | 0,0064 | 0,0512 | 0,2048 | 0,4096 | 0,32768 |

Многоугольник распределения



Вычислим функцию распределения:



**Задачи для самостоятельного решения**

(1) Гл.4, п. 4.2.1-4.3.3, № 41, 42, 44, 47-51, 53.

**Критерии оценивания:**

Отметка «5» ставится при сданной в срок работе, если работа выполнена верно и полностью, работа оформлена подробно и аккуратно, верно построены графики функций.

Отметка «4» ставится, если работа выполнена полностью, верно построены графики функций, но обоснования шагов решения недостаточны, допущена одна ошибка или два-три недочета, выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если допущены более одной ошибки или без недочетов выполнено не менее половины работы, работа может быть сдана не в срок.

Отметка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере, или работа выполнена неверно.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:**

Основные источники:

1. Григорьев В.П. Математика: учебник / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 368 с. – (Профессиональное образование).

2. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 160 с.

3. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. - М.: ИЦ Академия, 2017. - 400 с. - (Профессиональное образование).

4. Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник / М.И. Башмаков. - 2-е изд.,стер. - М.: ИЦ Академия, 2017. - 256 с. - (Профессиональное образование).

5. Гусев В.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия для профессий и специальностей социально - экономического профиля: учебник / В.А. Гусев. - 2 - е изд., стер. - М.: ИЦ Академия, 2018. - 416 с. - (Профессиональное образование).

6. Башмаков М.И. Математика: учебник / М.И. Башмаков. - 5-е изд., стер. - М.: ИЦ Академия, 2018 . - 256 с. - (Профессиональное образование).

Дополнительные источники:

1. Гусев В.А. Математика для профессий и специальностей социально- экономического профиля: учебник / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. - 4-е изд., испр. - М.: ИЦ Академия, 2019 . - 416 с. - (Профессиональное образование).

Интернет-ресурсы:

1. <http://math-portal.ru>-математический портал (все книги по математике)

2. <http://www.mathteachers.narod.ru-> математика для колледжей

3. <http://www.mathematics.ru> –математика за среднюю школу