Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение

Чувашской Республики

«Чебоксарский экономико-технологический колледж»

Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ**

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

специальность

среднего профессионального образования

**38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)**

Разработчик:

Иванова А.П., преподаватель

Чебоксары 2021

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Пояснительная записка 2. Введение 3. Основная часть    1. Тематическое планирование внеаудиторных работ   3.2. Задания к самостоятельной работе студентов  Тема 1 Предел функции  Тема 2 Дифференциальное исчисление  Тема 3 Интегральное исчисление  Тема 4 Матрицы и определители  Тема 5 Решение систем линейных уравнений | 4  4  6  7  9  9  10  15  22  26 |

1. **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

В связи с введением в образовательный процесс  нового Федерального государственного образовательного стандарта все более актуальной становится задача организации самостоятельной работы студентов. Самостоятельная работа определяется как индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая без непосредственного руководства педагога, но по его заданиям и под его контролем.

Самостоятельная работа студентов  является одной из основных форм  внеаудиторной работы при реализации учебных планов и программ.   По дисциплине «Математика» практикуются  следующие виды и формы самостоятельной работы студентов:

- отработка изучаемого материала по печатным и электронным источникам, конспектам лекций;

- изучение лекционного материала по конспекту с использованием рекомендованной литературы;

- написание конспекта-первоисточника;

- завершение практических работ и оформление отчётов;

- подготовка информационных сообщений, докладов с компьютерной презентацией, рефератов;

- подготовка материала-презентации.

  Самостоятельная работа может проходить в лекционном кабинете, компьютерном зале, дома.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода  к  решению проблем учебного и профессионального уровня.

Студент в процессе обучения должен не только освоить учебную программу, но и приобрести навыки самостоятельной работы. Студенту предоставляется возможность работать во время учебы более самостоятельно, чем учащимся в средней школе. Студент должен уметь планировать и выполнять свою работу.

Удельный вес самостоятельной работы составляет по времени 50% от количества аудиторных часов, отведённых на изучение дисциплины.  Самостоятельная работа студентов является обязательной для каждого студента и определяется учебным планом.

При определении содержания самостоятельной работы студентов следует учитывать их уровень самостоятельности и требования к уровню самостоятельности выпускников для того, чтобы за период обучения искомый уровень был достигнут.   
  
   Для организации самостоятельной работы необходимы следующие условия:  
-готовность студентов к самостоятельному труду;

- наличие и доступность необходимого учебно-методического и справочного материала;   
- консультационная помощь.

    Формы самостоятельной работы студентов определяются  при разработке рабочих программ учебных дисциплин содержанием учебной дисциплины, учитывая степень подготовленности студентов.

1. **ВВЕДЕНИЕ**

Самостоятельная работа студентов – учебная, учебно-исследовательская и общественно-значимая деятельность студентов, направленная на развитие общих и профессиональных компетенций, которая осуществляется без непосредственного участия преподавателя, но по их заданию.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

* формирования индивидуальной образовательной траектории, общих и профессиональных компетенций;
* обобщения, систематизации, закрепления, углубления и расширения полученных знаний и умений;
* формирования умений поиска и использования информации, необходимой для эффективного выполнения индивидуальной домашней работы;
* развития познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
* формирования самостоятельности профессионального мышления: способности к профессиональному и личностному развитию, самообразованию и самореализации;
* формирования умений использования информационно-коммуникационных технологий при подготовка реферата.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентами по заданию преподавателя, при их методическом руководстве, но без непосредственного участия преподавателя.

Если в процессе выполнения заданий для самостоятельной работы возникают вопросы, разрешить которые Вам не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений.

В рамках дисциплины «Математика» студенты выполняют следующие виды самостоятельной работы:

* работа с конспектом лекций, учебным материалом;
* решение задач;
* поиск информации на сайтах Интернета;
* построение графиков функций;
* выполнение индивидуальной домашней работы;
* подготовка к экзамену.

**Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:**

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются следующие умения и знания.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Код ОК | Умения | Знания |
| ОК 01 | умение решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности | знание основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности |
| ОК 02 | быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки | знание основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа |
| ОК 03 | организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня | значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ |
| ОК 04 | умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику | знание математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами |
| ОК 09 | умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности | знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов |

**3. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

**3.1. Тематическое планирование внеаудиторных работ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Тема №№*** | ***Вид работы*** | ***Методы контроля*** | ***кол-во***  ***часов*** |
| 1. Решение заданий на исследование функций с помощью производных. Построение графиков функции. | Работа с литературой, поиск в интернете. | Доклад на уроке | 1 |
| 2. Интегральное исчисление функций одной вещественной переменной. | Индивидуальная  домашняя контрольная работа | Проверка работы | 1 |
| 3. Вычисление определённого интеграла различными методами. | Индивидуальная  домашняя контрольная работа | Проверка работы | 1 |
| 4**.** Решение дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени, уравнений с разделяющимися переменными, а также однородных дифференциальных уравнений. | Индивидуальная  домашняя контрольная работа | Проверка работы | 1 |
| **5.** Сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матриц, нахождение обратных матриц и определителей матриц. | Работа с литературой Индивидуальная  домашняя контрольная работа | Проверка работы | 1 |
| 6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, по правилу Крамера и методом обратной матрицы. | Работа с литературой, поиск в интернете. | Проверка работы | 1 |

## 3.2 Задания к самостоятельной работе студентов

###### Тема 1: Решение заданий на исследование функций с помощью производных. Построение графиков функции.

###### Цель: получить представление о исследование функций с помощью производных. Доклад по теме: Исследование функций с помощью производных.

**Самостоятельная работа:** работа с литературой

**Форма контроля:** Доклад на уроке

**Требования к докладу:**

Доклад – публичное сообщение, представляющее собой развернутое изложение на определенную тему. Это работа, требующая навыков работы с литературой. Студент должен не только выбрать тему доклада, исходя из своих интересов, но и суметь подобрать литературу, выбрать из нее наиболее существенное, переложить своими словами и изложить в определенной последовательности. Доклад должен быть с научным обоснованием, доказуем.

Написание доклада является достаточно сложной работой и требует уже сформировавшихся умений и навыков работы с литературой, особой мыслительной деятельности, знаний правил оформления. Доклад требует плана, по которому он выполняется. При оценке доклада учитываются его содержание, форма, а также и культура речи докладчика.

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, материал в полной мере соответствует заявленной теме, выполнены чертежи к теоремам, докладчик излагает материал самостоятельно;

Оценка «4» ставится при хорошем раскрытии темы доклада, выполненных чертежах к теоремам, обучающийся излагает материал не самостоятельно.

Оценка «3» ставится при раскрытии темы не полностью, докладчик неуверенно излагает свои тезисы, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если тема доклада не раскрыта.

**Литература:**

1. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентлов учреждений СПО – 6-е изд., стер. М.: Академия, 2011. – 320с.

2. Пехлецкий И.Д. Математика;Учеб. Для студентов СПО.-М.;Академия,2010.

###### Тема 2,3: Интегральное исчисление

**Цель:** закрепить навыки по вычислению интегралов различными способами.

**Самостоятельная работа:** индивидуальная домашняя работа

**Форма контроля:** проверка работы

**Виды заданий:**

1. Вычислить неопределенный интеграл
2. Вычислить определенный интеграл
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси.

**Пример выполнения работы:**

**1. Первообразная функция и неопределенный интеграл**

Пусть у = F(x) имеет производную *у' = f (х*), тогда ее дифференциал

*dy = f (x) dx*

Функция F(x) по отношению к ее дифференциалу *f(x) dx* называется **первообразной.**

*Определение:* Функция F(x) называется **первообразной** для функции *f (x)* на заданном промежутке, если для всех *х* из этого промежутка F'(x) = *f (x).* Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

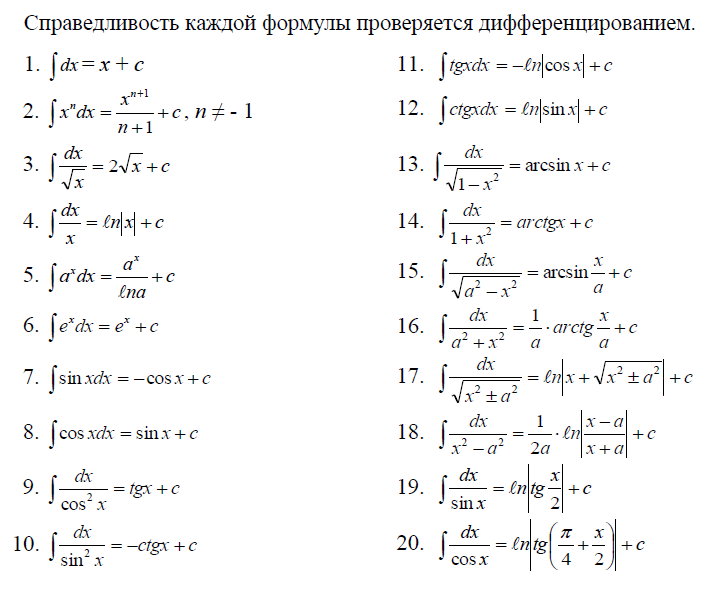
Пусть F(x) - первообразная для дифференциала *f (x) dx.*

Тогда:

(F(x) + С)' = F'(x) + С' = *f (x) +* 0 = *f (x)* , где С - постоянная.

Определение: совокупность всех первообразных функций F(x)+С для дифференциала *f (x) dx называется неопределенным интегралом и обозначается* *.*

= F(x)+С, где - подынтегральное выражение.

С- постоянная интегрирования. Процесс нахождения первообразной называется интегрированием. **Формулы интегрирования **

**Непосредственное интегрирование.**

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведения в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

**Интегрирование методом подстановки.**

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;

2) найти дифференциал от обеих частей замены;

3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);

4) найти полученный табличный интеграл;

5) сделать обратную замену.

**2. Определенный интеграл.**

Определенный интеграл**http://www.vevivi.ru/best/images/servus/80/45/4884580.png**от неотрицательной функции http://www.vevivi.ru/best/images/servus/59/45/4884559.png с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции http://www.vevivi.ru/best/images/servus/59/45/4884559.png, слева и справа – отрезками прямых х=а, х=b, снизу отрезком [a; b] Ох

**3. Приложения определенного интеграла**

**Вычисление площадей**

Фигура, ограниченная кривой *у = f (x)*, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется *криволинейной трапецией*. Отрезок [a;b] называется основанием криволинейной трапеции. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках *а – г.*

Площадь фигуры, ограниченной кривой *у = f (x)*, где *f (x) > 0*, осью *ОХ* и двумя прямыми *х = а и х = b*, выражается определенным интегралом: 

**Индивидуальная контрольная работа**

1. **Найдите неопределенные интегралы:**

*1.*  *16.* 

*2.*  *17.* 

*3.*  *18.* 

*4.*  *19.* 

*5.*  *20.* 

*6.*  *21.* 

*7.*  *22.* 

*8.*  *23.* 

*9.*  *24.* 

*10.*  *25.* 

*11.*  *26.* 

*12.* *27.* 

*13.*  *28.* 

*14.*  *29.* 

*15.*  *30.* 

1. Найдите определенные интегралы:
2.  16.
3.  17.
4.  18.
5.  19.
6.  20. 
7.  21. 
8.  22. 
9.  23. 
10.  24. 
11.  25.
12.  26.
13.  27.
14.  28. 
15.  29. 
16.  30. 

3. Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

###### *1) y = 3x-1, y = 0, x = 2, x = 4*

*2) x - 2y + 4 = 0, x + y – 5 = 0, y = 0*

*3) y =* *, y = 0, x = 0, x = 3*

*4) y = 9 -* *, y = 0*

*5) y = 4x -* *, y = 0*

*6) y =*  *- 2x + 3, y = 0, x = 0, x = 3*

*7) y =* *, 5x – y – 6 = 0*

*8) y =* *, x =* 

*9) y = -* *+ 6, y = 2x + 3*

4. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *ОХ* фигуры, ограниченной данными линиями:

*1) = 6x, y = 0, x = 1, x=3*

*2)*

*3) y =*  *- 4, x = 0*

*4) y =* *, y = 0, x = 0, x =* 

*5) = 4x, y = x*

*6) y = 4 -* *, x – y + 2 = 0*

5. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси *ОУ* фигуры, ограниченной данными линиями:

*1) y =* *, y = 1, y = 4, x = 0*

*2) y =*  *+ 1, y = 5*

*3) = 9x, y = 3x*

*4) = 2x, 2x + 2y – 3 = 0*

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все 4 задания выполнены верно, верно построены график функции при нахождении площади фигуры и объема тела, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при 3 верно выполненных заданиях, верно построены график функции при нахождении площади фигуры и объема тела, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненных верно 2 заданиях, но выполнено верно хотя бы одно из заданий по нахождению площади фигуры или объема тела с помощью интеграла, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно или выполнено верно 1 задание.

**Используемая литература:**

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего проф. образования-М.: Издательский центр «Академия», 2012 г

2. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М., Высшая школа, 2010.

3. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.,1989.

4. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентлов учреждений СПО – 6-е изд. , стер. М.: Академия, 2011. – 320с.

5. Пехлецкий И.Д. Математика ;Учеб. Для студентов СПО.-М.;Академия,2010.

###### Тема 4: Решение дифференциальных уравнений первого порядка и первой степени, уравнений с разделяющимися переменными, а также однородных дифференциальных уравнений.

**Цель:** закрепить навыки по вычислению решению дифференциальных уравнений.

**Самостоятельная работа:** индивидуальная домашняя работа

**Форма контроля:** проверка работы

###### Пример выполнения работы:

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Дифференциальными* называются уравнения, содержащие неизвестную функцию и её производные. Они занимают важное место в высшей математике и имеют многочисленные приложения в разных науках.

**1. Дифференциальные уравнения первого порядка**

**Определение 1.** *Дифференциальным уравнением* *первого порядка* называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и её первую производную, то есть уравнение вида

, (1)

где  – независимая переменная,  – искомая функция,  – её производная.

Если уравнение (1) можно разрешить относительно , то оно принимает вид

 (2)

и называется дифференциальным уравнением первого порядка, *разрешённым относительно производной.*

Например, уравнения , ,  являются дифференциальными уравнениями первого порядка, разрешёнными относительно производной.

**Определение** **2.** *Решением дифференциального уравнения* называется функция , определённая на некотором интервале , которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Например, функция  тождественно обращает в ноль левую часть уравнения  и поэтому представляет собой решение этого уравнения. Аналогично, функции ,  и, вообще, любая функция вида , где  – любое действительное число, является решением дифференциального уравнения .

**Определение** **3.** *Общим решением* *дифференциального уравнения* называется функция , удовлетворяющая этому уравнению при произвольном значении постоянной . На плоскости  общее решение представляет собой *семейство интегральных кривых*.

Таким образом, функция  – общее решение дифференциального уравнения .

В теории дифференциальных уравнений основным является вопрос о существовании и единственности решения. Ответ на него даёт теорема Коши.

**Теорема Коши:** *Пусть дано дифференциальное уравнение (2), разрешённое относительно производной. Если функция  и её производная  непрерывны в некоторой области  плоскости , то в окрестности любой внутренней точки  этой области существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию  при .*

Условия, которые задают значение функции  в фиксированной точке , называют *начальными условиями (условиями Коши)* и записывают в форме:

. (3)

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего условию (3), называется *задачей Коши*. Начальные условия (3) из множества интегральных кривых выделяют ту, которая проходит через точку ** области **.

**1.1. *Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными***

**Определение** **4.** Дифференциальное уравнение первого порядка вида

****, (4)

где  и  – непрерывные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

**Алгоритм решения** уравнений вида (4) носит название «разделение переменных» и состоит в следующем:

1) Разделить переменные, то есть добиться, чтобы в левой части уравнения стояла только переменная , в правой – только переменная  (в данном случае делением на ):

, .

2) Если необходимо, перейти от производных к дифференциалам, учитывая, что :

.

3) Вычислить интегралы от левой и правой частей:

.

4) Подстановкой в исходное уравнение проверить, являются ли решениями нули функций, на которые делили в пункте 1 (в данном случае нули функции).

**Примеры.** 1) Найдём общие решения дифференциальных уравнений:

а) .

Перепишем уравнение в виде .

Интегрируя обе части, имеем , где  – произвольная постоянная. Выражая искомую функцию , получаем , , что эквивалентно уравнению , .

Ответ: , .

б) .

Разделим переменные, для чего перенесём  в правую часть, поделим обе части полученного уравнения на  и умножим их на . Получим

, .

Интегрируя обе части, имеем , где .

При потенцировании получаем , , что эквивалентно уравнению , .

Проверим, является ли решением . Подстановка в исходное уравнение приводит к тождеству: . Следовательно,  – решение. Его можно включить в общее решение, убрав ограничение .

Ответ: , .

Семейство интегральных кривых представляет собой пучок возрастающих экспонент, проходящих через точку .

в) .

Разделим переменные, перенеся  в правую часть, поделив обе части полученного уравнения на  и умножив их на . Получим

, .

Интегрируя обе части, имеем , где . При потенцировании получаем  или , , , что эквивалентно уравнению , .

Проверим, являются ли решениями  и .

Подставляя  в исходное уравнение, получаем . Это не тождество, следовательно,  – не решение.

 является решением данного уравнения, так как обращает его в верное равенство. Его можно включить в общее решение, убрав ограничение .

Ответ: , .

Семейство интегральных кривых представляет пучок прямых, проходящих через начало координат.

2) Найдём частное решение уравнения , проходящее через точку .

Разделяя переменные, найдём общее решение:

, , .

Подставляя координаты точки  в общее решение, найдём . Тогда частное решение имеет вид .

Ответ: .

**1.2. *Однородные дифференциальные уравнения первого порядка***

**Определение** **5.** Функция  называется *однородной функцией порядка *, если для любого числа  выполняется равенство .

Например,  – однородная функциявторого порядка, так как ;  – однородная функция первого порядка;  – однородная функция нулевого порядка.

**Определение** **6.** Дифференциальное уравнение вида

,

где ,  – однородные функции одного порядка, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Это уравнение можно привести к виду

,

где  – однородная функция нулевого порядка.

С помощью **замены** , где  – новая неизвестная функция,  или , однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению **с разделяющимися переменными**.

**Примеры.** Найдём общие решения дифференциальных уравнений.

1) .

Это уравнение является однородным, так как функции ,  обе являются однородными функциями первого порядка. Сделаем замену , , имеем



или

,

.

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Поделим обе его части на , получим

, .

Интегрируя левую и правую части, имеем



или

, где , .

Сделав обратную замену , получим , .

Проверим, является ли  решением. Подстановка в исходное уравнение приводит к тождеству , значит,  – это решение.

Ответ: 

2) .

Так как  – однородная функция нулевого порядка, то данное уравнение также является однородным.

Сделаем замену , , получим

.

Сократив на , имеем



или

,

,

.

Последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на ,  и умножив на , получим

.

Интегрируя левую и правую части, имеем

,

.

Сделав обратную замену , находим общее решение уравнения:

, .

Проверим, являются ли решениями ,  или . Подставляя  и  в исходное уравнение, тождества не получаем, следовательно, это не решения.

Ответ:, .

###### Тема 5: Сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу, транспонирование матриц, нахождение обратных матриц и определителей матриц.

**Цель:** закрепить навыки по вычислению определителей второго, третьего и высших порядков.

**Самостоятельная работа:** индивидуальная домашняя работа

**Форма контроля:** проверка работы

**Виды заданий:**

Выполнение действий над матрицами.

Вычислить определитель 1,2,3 порядка.

Вычислить определитель высших порядков

Выполнить проверку с помощью программы MSExcel

###### Пример выполнения работы:

**Понятие о матрицах.**

Понятие матрицы и основанный на нём раздел математики – матричная алгебра – имеют важное значение для специалистов различного профиля – бухгалтера, товароведов, менеджера и особенно экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой и компактной матричной форме.

Матричные модели представляют собой модели, построенные в виде таблиц (матриц). Эти модели находят широкое применение при решении плановых и экономических задач и при обработке больших массивов информации.

Например: На складах фирмы:

Склад 1 Склад 2 Склад 3

Сахар 200 100 150

Соль 350 200 180

Мука 400 250 260

Эти данные можно записать в форме матрицы (массива) чисел:



С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (усл. ед.)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ресурсы | Отрасли экономики | |
| промышленность | сельское хозяйство |
| Электроэнергия | 5,3 | 4,1 |
| Трудовые ресурсы | 2,8 | 2,1 |
| Водные ресурсы | 4,8 | 5,1 |

Может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям:



Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений



также могут быть выделены в отдельную матрицу коэффициентов:



**Матрицы коэффициентов** – инструмент решения задач линейного программирования. Этим инструментом мы овладеем, когда поближе познакомимся с самой матрицей и действиями над ними.

**1.2. Основные понятия теории матриц.**

**Матрица –** это прямоугольная таблица чисел или других величин.

Любое число такого массива называется ***элементом*** матрицы.

Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально, называется ***строкой*** матрицы, а вертикально – ***столбцом.***

Количество строк в матрице обычно обозначается **m,** количество столбцов **– n.**

Количество элементов в матрице называется размерностью матрицы и обозначается **m** x **n.**

Матрицу обычно обозначают большой буквой**: А.**

Её элементы обозначаются той же, но маленькой буквой с индексами:

, где *i* – номер строки, *j* – номер столбца, где стоит элемент *a*, причём *i=1…m, j=1…n*.

Общий вид матрицы:

А=.

**Определение 1**. Когда в матрице число строк равно числу столбцов, т.е. *m=n*, то она называется ***квадратной*.**

Например:

.

**Определение 2.** Воображаемая линия квадратной матрицы, пересекающая её от  до , называется ***главной диагональю***, а наоборот, от  до 

- ***побочной диагональю***.

**Определение 3.** Если все элементы матрицы равны 0, то она называется ***нулевой***.

Например:

О=.

**Определение 4.** Квадратная матрица, в которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны 0, называется ***диагональной****:*

А=.

**Определение 5.** Диагональная матрица, у которой все элементы, расположенные на главной диагонали, - единицы, а остальные – нули, называется ***единичной***.

Единичную матрицу обозначают Е.

Например:

Е=.

Матрица называется положительной, если все её элементы >0.

Матрица, состоящая из одной строки, называется ***вектор – строкой* (**или матрицей - строкой**).**

Х=. Размерность: 1 х *n*.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***вектор – столбцом*** ( или матрицей - столбцом).

Например:

В=. Размерность: *m* х 1.

**1.3. Операции над матрицами**.

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причём некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые отличны от них.

***1.Умножение матрицы на число***:

Произведением прямоугольной матрицы А на число  называется матрица В=А, элементы которой  получены из элементов  умножением на число :

.

***Следствие****. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.*

Пример:

.

В частности, произведение матрицы на число 0 есть нулевая матрица, т.е.

0\*А=О.

***2. Сложение и вычитание матриц***.

Суммой (разностью) двух матриц А и В, имеющих одинаковую размерность *m* х *n* называется матрица С = А + В (C=А-В), элементы которой , где  (т.е. матрицы складываются (вычитаются) поэлементно).

Разность двух матриц одинакового размера следует из равенства С= А – В = А + (-1)В.

Например:

С =.

В частности, А+О=А.

Итак, складывать и вычитать можно только матрицы с одинаковой размерностью.

***3. Умножение матриц.***

***Замечание:*** *Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.* Тогда произведением матриц  называется такая матрица , каждый элемент которой  равен сумме произведений элементов *i-*й строки матрицы А на соответствующие элементы *j-*го столбца матрицы В, т.е. каждый элемент матрицы С вычисляется по формуле:

, где 

Пример 1:



.

Пример 2: Найти произведения матриц АВ и ВА, если

А=, В=.

Решение. ;

**.**

Частный случай: АЕ=ЕА=А.

**1.4. Свойства операций над матрицами.**

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1. А + В = В + А.
2. (А + В) + С =А + (В + С).
3. (А + В)=А +В
4. А(В + С)=АВ + АС
5. А(ВС)=(АВ)С
6. (АВ)=(А)В
7. 
8. АЕ=А
9. АО=О.

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, к примеру, операция умножения матриц, имеет некоторые отличия от умножения чисел:

АВВА. В этом мы убедились на примере 2.

Если произведение АВ существует, то произведение ВА может и не существовать. Если даже произведения АВ и ВА существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

Разберём несколько примеров применения операций над матрицами к задачам:

**Пример 3.** Один из цехов предприятия «Итальянский стиль» выпускает продукцию трёх видов (кастрюли, сковородки, набор для выпечки) и использует сырьё двух типов  ( металл с антипригарным покрытием и специальную пластмассу), нормы расхода сырья характеризуются матрицей А=, где каждый из элементов показывает, сколько единиц сырья S расходуется на производство единицы продукции. Стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) заданы матрицей - столбцом В=, план выпуска ежедневной продукции задан матрицей С=(100 80 130), т.е. 100 кастрюль, 80 сковородок, 130 наборов для выпечки. Определить затраты сырья, необходимого для планового ежедневного выпуска продукции и общую стоимость сырья.

**Решение.** Затраты 1-го сырья составляют = ед. и 2-го - ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение S=CA=. Тогда общая стоимость сырья Q= ден. ед. может быть записана в матричном виде Q=SB=(CA)B=(70900). Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу R=AB=, а затем общую стоимость сырья Q=CR=C(AB)=.

На данном примере мы убедились в выполнении свойства 5 ассоциативного закона произведения матриц, а так же убедились, что операции над матрицами позволяют упростить решение некоторых экономических задач.

***1. Вычислить определитель второго порядка***

**Определителем второго порядка** называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов 

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

 = a1b2 – a2b1

Пример: вычислить определитель второго порядка

1) 

2) 

***2****.* ***Вычислить определитель третьего порядка***

**Определителем третьего порядка** называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:



Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правила называют еще «Правило треугольника»

Пример: Вычислить определитель третьего порядка



***3. Вычислить определитель высшего порядка***

В общем виде определитель n-го порядка может быть представлен следующем виде:



где aij– элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем aijв определителе и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется **минором элемента aij.** Обозначается минор – Mij.

Пример: Найти минор элемента а12 определителя 

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.



В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:



**Алгебраическим дополнением** элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

 - алгебраическое дополнение

**ТЕОРЕМА:** Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.



Пример: Вычислить определитель четвертого порядка 

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:



**Варианты заданий:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Задание |
| 1 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |
| 2 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |
| 3 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |
| 4 | 1) а) D = ; б) D = ;в) D = |
| 5 | 1) а) D = ; б) D = ;в) D = |
| 6 | 1) а) D = ; б) D = ;в) D = |
| 7 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |
| 8 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |
| 9 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |
| 10 | 1) а) D = ; б) D = ; в) D = |

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все задания выполнены верно, выполнена проверка с помощью программы Excel, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при 1 неверно выполненном задании, или не выполнена проверка в Exel, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненном верно 1 задании, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно.

###### Литература:

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М., Высшая школа, 2010.

2. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.,1989.

3. Григорьев В. П., Дубинский Ю. А. Элементы высшей математики: Учебник для студентлов учреждений СПО – 6-е изд. , стер. М.: Академия, 2011. – 320с.

4. Пехлецкий И.Д. Математика ;Учеб. Для студентов СПО.-М.;Академия,2010.

###### Тема 6: Решение систем линейных алгебраических уравнений различными методами.

**Цель:** закрепить навыки по решению систем методом Крамера и методом Гаусса.

**Самостоятельная работа:** индивидуальная домашняя работа

**Форма контроля:** проверка работы

**Виды заданий:**

1. Решить систему методом Крамера
2. Решить систему методом Гаусса
3. Выполнить проверку с помощью программы MSExcel

###### Пример выполнения работы:

1. ***Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера***

 Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

х1 , х2 , …, хn– неизвестные,

b1, b2, …., bn - столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных



Составим вспомогательные определители системы следующим образом:



 … 

Тогда решением системы является:

, , …, 

Отметим следующее:

1. Если определитель системы D ≠ 0, то система определена, т.е. имеет единственное решение
2. Если D = Dx1 = Dx2 = … =Dxn = 0, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.
3. Если D = 0, но хотя бы один из Dx1, Dx2, … ,Dxnне равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из – за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

2х + 3у = 1

х – у = 0

Вычислим все определители:







Отсюда 



Ответ: , 

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:



Вычислим:



Тогда:



Ответ: х1=2/3, х2=1, х3=0.

**Индивидуальная контрольная работа:**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант | Задание |
| 1 | а)  б) |
| 2 | а)  б) |
| 3 | а)  б) |
| 4 | а)  б) |
| 5 | а)  б) |
| 6 | а)  б) |
| 7 | а)  б) |
| 8 | а)  б) |
| 9 | а)  б) |
| 10 | а)  б) |

**Критерии оценивания:**

Оценка «5» ставится при сданной в срок работе, все задания выполнены верно, системы решены всеми заявленными способами, работа оформлена подробно и аккуратно;

Оценка «4» ставится при верно выполненных заданиях, но могут системы решены не всеми требуемыми способами, работа оформлена подробно и аккуратно

Оценка «3» ставится при выполненных верно заданиях, но решение системы представлено 1 способом, работа может быть сдана не в срок.

Оценка «2» ставится, если домашняя контрольная работа выполнена неверно или выполнено верно 1 задание.

###### ЛИТЕРАТУРА

**Основные источники:**

1. Григорьев В.П. Математика: учебник / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 368 с. – (Профессиональное образование).
2. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 160 с.

**Дополнительные источники:**

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 400 с.
2. Омельченко В.П. Математика: учеб. пособие / В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова. – 8-е изд.,стереотип. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 380с. – (Среднее профессиональное образование).
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2007. – 464 с.

**Электронные издания (электронные ресурсы)**

1. Единая Университетская библиотека. Код доступа <https://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red>
2. Математический портал по высшей математике с подборкой материалов к занятиям и контрольным работам. Код доступа [**http://mathportal.net/**](http://mathportal.net/)
3. Формулы, уравнения, теоремы, примеры решения задач <http://matematika.electrichelp.ru/matricy-i-opredeliteli/>
4. Материалы по математике для самостоятельной подготовки Код доступа <http://www.mathprofi.ru/>
5. Изучение математики онлайн Код доступа <https://ru.onlinemschool.com/math/library/>
6. Собрание учебных онлайн калькуляторов, теории и примеров решения задач Код доступа[http: //ru.solverbook.com/](http://ru.solverbook.com/)
7. Справочный портал Код доступа: <https://www.calc.ru/>