Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Чувашской Республики «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

**ЕН.02. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ**

специальность

среднего профессионального образования

**09.02.07 Информационные системы и программирование**

Разработчик:

Васильева О.М., преподаватель

Чебоксары 2023

Методические указания для студентов к практическим занятиям являются частью программы подготовки специалистов среднего профессионального образования ГАПОУ ЧР «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики и составлены на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО) по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.02. Дискретная математика с элементами математической логики.

Методические указания подготовлены с целью повышения эффективности профессионального образования и самообразования в ходе практических занятий по учебной дисциплине ЕН.02. Дискретная математика с элементами математической логики. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Методические указания содержат задания к практическим работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных вопросов по каждой практической работе, требования к знаниям и умениям. Приведен список основной и дополнительной литературы для подготовки к практическим работам.

Методические указания к практическим занятиям предназначены для студентов очной формы обучения.

Организация-разработчик: Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Чувашской Республики «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Пояснительная записка | 4 |
| Общие компетенции | 5 |
| Перечень практических занятий | 6 |
| Общие требования к практическим занятиям | 7 |
| Контроль выполнения практических занятий | 8 |
| Практическая работа №1 «Формулы логики. Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований» | 9 |
| Практическая работа №2«Приведение формул логики к ДНФ, КНФ с помощью равносильных преобразований. Представление булевой функции в виде СДНФ и СКНФ» | 13 |
| Практическая работа №3«Представление булевой функции в виде минимальной ДНФ и КНФ» | 17 |
| Практическая работа №4 «Проверка булевой функции на принадлежность к классам Т0, Т1, S, L, M. Полнота множеств» | 20 |
| Практическая работа №5«Множества и основные операции над ними. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна» | 22 |
| Практическая работа №6«Исследование свойств бинарных отношений. Теория отображений и алгебра подстановок» | 25 |
| Практическая работа № 7«Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции» | 29 |
| Практическая работа №8 «Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов» | 32 |
| Практическая работа №9 «Работа машины Тьюринга» | 36 |
| Литература | 40 |

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.02. Дискретная математика с элементами математической логики для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Методические указания предназначены для организации учебного процесса по данной дисциплине, а также подготовки и проведению практических занятий и их проверки.

Практические работы направлены на формирование практических учебных умений применения методов дискретной математики к решению различных задач. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Содержанием практических работ является решение различных примеров и задач по дискретной математике. Состав заданий для практического занятия спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время большинство обучающихся могли их выполнить качественно.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практической работы используется индивидуальная форма организации работы обучающихся.При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая практическая работа оформляется в тетради для практических работ. В оформление работы входит запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

**ОБЩИЕ КОМПЕТЕНЦИИ**

Выполнение практических работ по дисциплине ЕН. 02 Дискретная математика с элементами математической логики направлено на формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учётом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.

**ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Разделы** | **Наименование тем занятий,практической работы** | **Кол-во часов** | **Форма контроля** |
| **Раздел 1. Основные математической логики** | **Тема 1.1. Алгебра высказываний** |  |  |
| 1. Формулы логики. Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований. | 2 | письменная работа |
| **Тема 1.2. Булевы функции** |  |  |
| 2. Приведение формул логики к ДНФ, КНФ с помощью равносильных преобразований. Представление булевой функции в виде СДНФ и СКНФ. | 2 | письменная работа |
| 3. Представление булевой функции в виде минимальной ДНФ и КНФ. | 2 | письменная работа |
| 4. Проверка булевой функции на принадлежность к классам Т0, Т1, S, L, M. Полнота множеств. | 2 | письменная работа |
| **Раздел 2. Элементы теории множеств** | **Тема 2.1. Элементы теории множеств** |  |  |
| 5. Множества и основные операции над ними. Графическое изображение множеств на диаграммах Эйлера-Венна. | 2 | письменная работа |
| 6. Исследование свойств бинарных отношений. Теория отображений и алгебра подстановок. | 2 | письменная работа |
| **Раздел 3. Логика предикатов** | **Тема 3.1. Предикаты** |  |  |
| 7. Нахождение области определения и истинности предиката. Логические операции над предикатами. Построение отрицаний к предикатам, содержащим кванторные операции.  | 2 | письменная работа |
| **Раздел 4. Элементы теории графов** | **Тема 4.1. Основы теории графов** |  |  |
| 8. Графы. Исследование отображений и свойств бинарных отношений с помощью графов. | 2 | письменная работа |
| **Раздел 5. Элементы теории алгоритмов** | **Тема 5.1. Элементы теории алгоритмов** |  |  |
| 9. Работа машины Тьюринга. | 2 | письменная работа |
| **Итого:** | **18** |  |

**ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

Ознакомление с заданием и предварительная подготовка к работе.

Практические занятия проводят согласно учебному плану под руководством преподавателя.

1. Предварительная подготовка к выполнению практической работы состоит в следующем:

Преподаватель заранее объявляет о предстоящий практической работе, информирует о содержании и целях работы, порядке ее подготовки и выполнения.

Преподаватель предлагает обучающимся самостоятельное (внеаудиторное)выполнение задания по подготовке к практической работе.

Обучающиеся повторяют теоретический материал к заданной теме, изучают главы параграфов, указанных преподавателем, конспекты.

2. Подготовка и проведение практического занятия.

Преподаватель подробно инструктирует обучающихся о ходе предстоящей работы: называет тему, цели, требования к выполнению работы, особенности заданий, объяснение методов (способов, приемов) их выполнения, критерии оценки.

Преподаватель выдает бланки заданий обучающимся, обучающиеся приступают к выполнению работы: читают задание, задают вопросы, в тетрадь записывают решения, производят расчеты, оформляют ответы и т. д.

В течение практического занятия преподаватель контролирует правильность выполнения заданий, сопровождает дополнительными разъяснениями по ходу работы (при необходимости).

В конце практического занятия проводиться подведение итогов, выставляются оценки результатов работы отдельных студентов, ответы на вопросы студентов, выдача рекомендаций по устранению пробелов в системе знаний и умений студентов, по улучшению результатов работы, задание на дом для закрепления пройденного материала и по подготовке к следующему практическому занятию.

3. Требования к выполнению заданий.

Задания необходимо выполнять с максимальной точностью.

Обучающийся должен стремится к аккуратности, полноте записей. В зависимости от задания, решения должны содержать: расчеты, формулы, заполненные таблицы, графики пр.

**КОНТРОЛЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

Критерии оценки

Отметка «5» ставится, если: работа выполнена верно и полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если: работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки); выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если: допущены более одной ошибки или более трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; без недочетов выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, которые обнаруживают незнание обучающимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

К недочетам относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Практическая работа № 1

**ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ. УПРОЩЕНИЕ ФОРМУЛ ЛОГИКИ С ПОМОЩЬЮ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться формализовывать высказывания, строить таблицы истинности для формул логики; научиться выполнять равносильные преобразования, используя законы логики; научиться решать логические задачи различными способами

Для выполнения работы необходимо знать формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики; формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

 **КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Формулой алгебры логики** называется всякое составное высказывание, содержащее логические переменные и знаки логических операций. Для записи составного высказывания на формальном языке нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

*Пример 1*. Записать с помощью формулы логики высказывание: неверно, что если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер.

*Решение.* Обозначим буквой А высказывание: «идет дождь», буквой В высказывание: «будет солнечная погода», буквой С высказывание: «будет ветер». Разделим составное высказывание на простые и каждое запишем с помощью формулы логики:

«нет дождя» - ; «если нет дождя, то будет солнечная погода» - ;

«дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» - .

Между простыми высказываниями стоит союз «и», т.е. они соединяются с помощью конъюнкции и составное высказывание «если нет дождя, то будет солнечная погода, и дождь пойдет тогда и только тогда, когда будет ветер» запишется в виде: . Т.к. перед этим составным высказыванием стоит слово «неверно», то нужно поставить отрицание над всей формулой.

В итоге заданное высказывание формализуется следующим образом: **.**

*Ответ:* **.**

Для каждого логического выражения можно построить таблицу истинности, позволяющую определить истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений логических переменных.

*Пример 2.* Построить таблицы истинности для формулы )↔(X→Y&).

*Решение.* Определим количество строк и столбцов в таблице. Т.к. в логическое выражение входят три переменные, то по формуле 23 получим 8 строк. Количество столбцов равно количеству логических переменных (3) + количество операций (6), получим 9 столбцов. Учитывая приоритет операций, расставляем порядок действий )(XY). Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z |  |  |  | Y& | X→Y& | )↔(X→Y&) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# Для упрощения сложных формул логики используются равносильные преобразования, которые основаны на законах логики.

# Законы логики

1. Закон тождества: А = А
2. Закон непротиворечия: А& = 0
3. Закон исключенного третьего: А∨ = 1
4. Закон двойного отрицания: .
5. Законы коммутативности: ABBA

A∨BB∨A

1. Законы дистрибутивности: А∨(ВC) = (A∨B)(A∨C)

 А (В∨C) = AB∨AC

1. Ассоциативные законы: А∨(В∨C) = (A∨B)∨C

 А(ВC) = (AB)C

1. Законы идемпотентности: A\*AA

A∨AA

1. Законы де Моргана:
2. A→B=∨B (снятие импликации)
3. A↔B=AB∨ (снятие эквиваленции)
4. Свойства констант: А∨1 = 1 А&1 = A А**∨**0 = А А**&**0 = 0

Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач: ***средствами алгебры логики с помощью равносильных преобразований; табличный; с помощью рассуждений***.

*Пример 3.* ***Решить задачу с помощью преобразований***

По телевизору синоптик объявляет прогноз погоды на завтра и утверждает следующее:

1) Если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя.

2) Если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.

3) Если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра.

Какая же погода будет завтра?

*Решение.* Введем обозначение для простых логических высказываний:

А – будет ветер

В – будет пасмурно

С – будет дождь

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

1. →B
2. → B
3. B → C

Запишем произведение сложных высказываний и упростим его:

(→B→ B)&( B → C) = (∨ B∨ B )&(∨ C) =

= (∨ AB∨B∨ B&(∨ C) = (∨B∨ B) &(∨C) =

= (∨B(1∨A)) &(∨C) = (∨B&(∨ C)) = A∨∨ B∨B = A

*Ответ*: будет ветер, не будет дождя и будет не пасмурно.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** В следующих высказываниях выделить простые, обозначив каждое из них буквой. Записать составное высказывание с помощью формулы логики.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А) На уроке физики ученики выполняли лабораторную работу и сообщали результаты исследований учителюБ) Если светит солнце и не дует ветер, то не будет дождя С) Произведение двух чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю | А) Катя любит писать сочинения или решать задачи.Б) Если дует ветер, то солнце светит тогда и только тогда, когда нет дождяС) Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб. | А) Если Маша сестра Саши, то Саша брат МашиБ) Погода будет солнечной тогда и только тогда, когда ни будет ни ветра, ни дождяС) Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6 |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А) Голова думает тогда и только тогда, когда язык отдыхаетБ) Неверно, что если дует ветер и солнце светит, то нет дождяС) Если число делится на 2 и не делится на 5, то оно не делится на 10 | А) Земля движется по круговой или эллиптической орбитеБ) Если ветра нет, то дождь будет тогда и только тогда, когда будет пасмурная погодаС) Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю. | А) Ты можешь купить в магазине продукты, если у тебя есть деньгиБ) Неверно, что если погода пасмурная, то дождь идет тогда и только тогда когда нет ветраС) Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15. |

***Задание 2.*** Построить таблицы истинности для формул:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| ∨x | &x | (x&y)→ |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| (∨y)↔x  | x→() | x↔() |
|  |  |  |
|  |  | ∨ |

***Задание 3.*** С помощью таблицы истинности установить, равносильны ли следующие формулы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
|  и  |  и  |  и  |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
|  и  |  и  |  и  |

***Задание 4.*** С помощью равносильных преобразований упростить формулы логики

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
|  |  |  |  |

***Задание 5****.* Решить логические задачи с помощью преобразований

# I вариант

# Задача 1. Кто играет в шахматы? Определите, кто из трёх мальчиков Александр, Борис и Сергей играет в шахматы, если известно:

1) играет Александр или Борис;
2) если играет Александр, то играет и Борис;
3) Александр и Сергей оба играют или оба не играют.

**Задача 2.** Три ученика, Саша, Коля и Вова, прогуляли информатику. Когда их спросили, кому пришла в голову эта идея, они ответили следующее:

1. Саша: «Я никогда не призывал к прогулу, это была идея Коли».
2. Коля: «Я никогда не предложил бы это первым, во всем виноват Вова».
3. Вова: «Эта идея пришла в голову Коле. Я просто пошел за компанию».

Внутренним чутьем учитель почувствовал, что два ученика говорят правду, а третий – лжет. Кто из учеников был инициатором прогула?

**II вариант**

**Задача 1**. Компьютер вышел из строя. Известно, что:

1. Если монитор неисправен, то исправна видеокарта, но несправна оперативная память.
2. Если видеокарта исправна, то исправна оперативная память, но неисправен монитор.
3. Если оперативная память исправна, то исправна видеокарта, но неисправен монитор.

Что неисправно в компьютере?

**Задача 2**. Три школьника, Миша, Коля и Сергей, остававшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

1. Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже…»
2. Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»
3. Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что двое ребят сказали правду, а третий оба факта соврал. Зная это, директор смог докопаться до истины. Кто разбил стекло в классе?

**III вариант**

**Задача 1.** Кто из учеников идет на олимпиаду по физике, если известно следующее:

1. Если Миша идет, то идет Аня, но не идет Маша.
2. Если Маша не идет на олимпиаду, то идет Аня, но не идет Миша.
3. Если Аня идет, то идет Миша, но не идет Маша.

**Задача 2.** Один из 3 братьев: Алеша, Витя и Семен поставил на скатерть кляксу. Кто запачкал скатерть? - спросила бабушка.

1. Витя не ставил кляксу, - сказал Алеша, - Это сделал Семен.

2) Это Витя поставил кляксу, - сказал Семен, - А Алеша не пачкал скатерть.

3) Я знаю, что Семен не мог этого сделать. - сказал Витя.

 Оказалось, что двое мальчиков сказали правду, а один сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

**IV вариант**

**Задача 1.** Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

1) если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;

2) если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

**Задача 2.**Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:

1. Аня пойдет в кино, а Вика останется дома;
2. Сергей пойдет в кино, но Аня не пойдет;
3. Сергей не пойдет в кино и Вика не пойдет в кино.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинным оказались только два. Кто из ребят пошел в кино?

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. В чем разница между простыми и составными высказываниями?
2. Что такое таблица истинности?
3. Как определяется количество строк в таблице истинности?
4. Какие законы логики Вы использовали при упрощении формул логики?

Практическая работа № 2

**ПРИВЕДЕНИЕ ФОРМУЛ ЛОГИКИ К ДНФ, КНФ С ПОМОЩЬЮ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.**

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СДНФ И СКНФ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться представлять булевы функции в виде СДНФ и СКНФ; научиться строить логические схемы, реализующие булевы функции.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики; формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

# С помощью равносильных преобразований формулу логики можно привести к дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме (ДНФ и КНФ).

# Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция простых конъюнкций.

*Пример 1*. Привести к ДНФ формулу (X→Y)&(Y→Z).

# *Решение*

# избавляемся от импликации в скобках;

# раскрываем скобки, пользуясь законом дистрибутивности;

# упрощаем выражение, пользуясь законом непротиворечия (Y = 0) и законом константы для нуля (X∨0=X).

# (X→Y)&(Y→Z) = (∨Y)&(∨Z) = ∨Z∨Y∨YZ =∨Z∨YZ

# *Ответ:*(X→Y)&(Y→Z) = ∨Z∨YZ.

# Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция простых дизъюнкций.

*Пример 2*.Привести к КНФ формулу (Х→Y)((→Z)→)

*Решение*

# избавляемся от импликации в скобках;

# во второй скобке используем закон де Моргана & и далее закон дистрибутивности.

(Х→Y)((→Z)→) = (∨Y)(∨) = (∨Y)((&) ∨) = **(∨Y)&() &)**

*Ответ:* (Х→Y)((→Z)→) = (∨Y)&() &).

Нормальная форма называется **совершенной**, если в каждой ее элементарной дизъюнкции (конъюнкции) представлены все переменные, входящие в данную функцию (либо сами, либо с отрицанием).

*Пример 3*. Найти СДНФ для булевой функции: F(x,y,z) = (x↔y)∨(y↔z) аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

*Решение*

а) С помощью законов логики заменим эквиваленцию дизъюнкцией и отрицанием, приведем булеву функцию к ДНФ.

F(x,y,z) = (x↔y)∨(y↔z) = (xy∨) ∨(yz∨) = xy∨∨yz∨.

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, умножим каждое слагаемое на 1, и затем представим 1 в виде: 1 = а∨ (вместо *а* необходимо записать недостающую переменную)

F(x,y,z) = xy1∨1∨yz1∨1=xy(z∨)∨(z∨)∨yz(x∨)∨(x∨)=xyz∨xy∨z∨∨yzx∨yz∨

∨x∨ = **xyz∨xy∨z∨yz∨x∨**

б) Построим таблицу истинности для функции F(x,y,z) = (x↔y)∨(y↔z).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | x↔y | y↔z | (x↔y)∨(y↔z) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | **1** |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** |

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции истинно и для каждого набора построим элементарные конъюнкции, причем каждой переменной xk=1 будет соответствовать xk, а каждой xk=0 будет соответствовать k. Далее составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

**F(x,y,z) =xyz∨z∨yz∨x∨xy∨**

*Ответ:* СДНФF(x,y,z) = xyz∨xy∨z∨yz∨x∨

*Пример 4*. Найти СКНФ для булевой функции: F(x,y,z) = (x∨y)(z→x) аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

*Решение.*

а) С помощью законов логики заменим импликацию дизъюнкцией и отрицанием и приведем булеву функцию к КНФ.

F(x,y,z) = (x∨y)(z→x) = (x∨y)(∨x).

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, прибавим к каждому слагаемое 0, и затем представим 0 в виде: 0 = а (вместо *а* необходимо записать недостающую переменную)

F(x,y,z) = (x∨y∨0)(∨x∨0)=(x∨y∨z)(∨x∨y)=(x∨y∨z)(x∨y∨)(∨x∨y)(∨x∨) = (x∨y∨z) (∨x∨y) (∨x∨).

б) Построим таблицу истинности для функции F(x,y,z) = (x∨y)(z→x).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | x∨y | z→x | (x∨y)(z→x) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции ложно и для каждого набора построим элементарные дизъюнкции, причем каждой переменной xk=1 будет соответствовать k, а каждой xk=0 будет соответствовать xk. Далее составляем конъюкнции построенных элементарных дизъюнкций.

**F(x,y,z) = (x∨y∨z) (∨x∨y) (∨x∨)**

*Ответ:* СКНФ:F(x,y,z) = (x∨y∨z) (∨x∨y) (∨x∨)

Устройства, реализующие элементарные булевые функции, называются **логическими элементами**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Функция | Графическое изображение | Функция | Графическое изображение |
|  | 2*x*11*x**x* |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 2*x*&1*x* |  |  |

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить сложные логические схемы.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.***

1. Найти ДНФ для данной булевой функции.
2. Найти СДНФ для данной булевой функции аналитическим способом.
3. Найти СДНФ для данной булевой функции с помощью таблицы истинности.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | F(x,y,z) = (→yz)∨(y↔z) |
| **II вариант** | F(x,y,z) = (→xz)∨(↔z) |
| **III вариант** | F(x,y,z) = (↔y)∨(xy→yz) |
| **IV вариант** | F(x,y,z) = (z→y)∨ (x↔z) |

***Задание 2.***

1. Найти КНФ для данной булевой функции.
2. Найти СКНФ для данной булевой функции аналитическим способом.
3. Найти СКНФ для данной булевой функции с помощью таблицы истинности.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | F(x,y,z) = (→z)(∨x) |
| **II вариант** | F(x,y,z) = (∨z)(y→zx) |
| **III вариант** | F(x,y,z) = (→)(x∨zy) |
| **IV вариант** | F(x,y,z) = (x∨y)(x→z) |

***Задание 3.*** Для данной булевой функции построить логическую схему

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | F(x,y,z) = (x∨y)(⊕z) |
| **II вариант** | F(x,y,z) = (&y)∨⎢z) |
| **III вариант** | F(x,y,z) =( (⊕z) |
| **IV вариант** | F(x,y,z) = (x&)∨⎢z) |

***Задание 4.*** По заданной логической схеме построить булеву функцию и составить ее таблицу истинности:

**I вариант**

&

x

y

zz

не-или

**II вариант**

&

x

y

zz

 +

**III вариант**

&

x

y

zz

+

**IV вариант**

&

x

y

zz

не-или

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие законы логики применяются для ввода недостающих переменных при представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ?
2. Приведите примеры логических схем, используемых в ЭВМ.

Практическая работа № 3

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ МИНИМАЛЬНОЙ ДНФ И КНФ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться минимизировать булевы функции с помощью равносильных преобразований и графическим методом карт Карно.

Для выполнения работы необходимо знать основные формулы алгебры высказываний, методы минимизации алгебраических преобразований; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Нормальная форма называется ***минимальной***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

***Минимальная нормальная*** форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). ***Тупиковой нормальной формой*** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной

*Пример 1.* Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а)составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую схему, реализующую данную функцию.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | F(x,y,z) |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | **1** |

*Решение.*

а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

F(x,y,z) = yz∨xy∨xyz

б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

F(x,y,z) = yz∨xy∨xyz =(yz∨xyz)∨xy= yz(∨x)∨xy = yz∨xy = y(z∨x) = y(z∨x)(z∨) = y(z∨x)

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:

1

&

x

y

zz

z∨x

F = y(z∨x)

Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический метод карт Карно. **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с 23 = 8 клетками:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 |  |  |  |  |
|  0 |  |  |  |  |

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с 24 = 16 клетками.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| хy |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

*Пример 2.* Дана функция F(x,y,z) = y∨yz∨xy∨xyz. Построить минимальную нормальную форму данной функции.

*Решение*

*1 способ: с помощью равносильных преобразований*

F(x,y,z) = y∨yz∨xy∨xyz = (y∨yz)∨(xy∨xyz) = y(∨z) ∨xy(∨z) = y∨xy = y(∨x) = y

*2 способ: с помощью карт Карно*

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

1. Обведем единицы попарно двумя контурами.
2. В первом контуре не меняются переменные , во втором – переменные .
3. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: **F(x,y,z) = ∨xy = y**.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная y, следовательно, **F(x,y,z) = y**.

*Ответ*: минимальная нормальная форма: **F(x,y,z) = y**.

*Пример 3.* Построить минимальную форму для булевой функции, заданнойтаблично.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** | **z** | **F** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

*Решение*

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  00 |  10  |  11 |  01 |
| z 1 |  |  | 1 |  |
|  0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Обведем единицы в два контура.
2. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные .
3. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) = ∨xy**.

*Ответ:*F(x,y,z) = ∨xy.

Кроме рассмотренных методов минимизации существуют также метод Куайна, метод диаграмм Вейча. Минимальную нормальную форму удобно использовать при построении логических схем.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1*.** Привести СДНФк минимальной двумя способами: а) с помощью равносильных преобразований; б) с помощью карт Карно.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант** |
| F(x,y,z) = ∨∨xz∨xyz | F(x,y,z) = ∨∨xz∨xy |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = ∨∨xz∨xy | F(x,y,z) = ∨∨z∨x |

***Задание 2.*** Для данной булевой функции а)составить СДНФ; б) минимизировать СДНФ с помощью равносильных преобразований и карт Карно; в) построить логическую схему, реализующую функцию.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  | **IV вариант** |
| F(x,y,z) = (11001000) | F(x,y,z) = (01010100) | F(x,y,z) = (11000100) | F(x,y,z) = (00110010) |

***Задание 3.*** Постройте минимальную форму для функции, выраженной картой Карно.

**I вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  | 1 |  |  | 1 |
|  |  | 1 | 1 | 1 |
| 1хy |  |  |  |  |
|  | 1 |  | 1 | 1 |

**II вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  |  | 1 | 1 |  |
|  |  | 1 | 1 | 1 |
| 1хy |  |  |  | 1 |
|  |  | 1 | 1 |  |

**III вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  | 1 | 1 |  | 1 |
|  | 1 | 1 |  |  |
| 1хy |  |  |  |  |
|  |  | 1 | 1 | 1 |

**IV вариант**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | d | zd | z |
|  | 1 | 1 |  | 1 |
|  |  |  | 1 | 1 |
| 1хy | 1 |  |  |  |
|  | 1 | 1 |  |  |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие еще существуют методы минимизации булевых функций?
2. Почему при построении логических схем удобнее использовать минимальную форму булевой функции?

Практическая работа № 4

**ПРОВЕРКА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ НА ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ К КЛАССАМ Т0, Т1, S, L, M. ПОЛНОТА МНОЖЕСТВ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться проверять булеву функцию на принадлежность к основным замкнутым классам.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы математической логики; необходимо уметь применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики, формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Класс функций называется **функционально замкнутым**, если любая суперпозиция функций этого класса принадлежит этому же классу.

**Функционально замкнутые классы булевых функций (классы Поста):**

1. Класс функций, сохраняющих константу 0 – **T0** = {f|f(00..0) = 0}: функции, для которых выполняется f(00..0) = 0.
2. Класс функций, сохраняющих константу 1 – **T1** = {f|f(11..1) = 1}: функции, для которых выполняется f(11..1) = 1.
3. Класс самодвойственных функций **S**.

Функция f называется самодвойственной, если f = f\* (f\* - двойственная функция по отношению к f).

1. Класс линейных функций – **L**.

Булева функция называется линейной, если ее полином Жегалкина имеет вид многочлена первой степени.

F(x1, x2, …, xn) = c0⊕ c1x1⊕ c2x2⊕ … ⊕ cnxn

1. Класс монотонных функций – **М**.

Аргумент x = (x1, x2, …, xn) называется предшествующим аргументу y = (y1, y2, …, yn) (обозначение x≤y), если ∀i выполнено xi≤yi.

Функция называется монотонной, если для любых двух элементов x, y, сравнимых между собой, из x≤y следует f (x1, x2, …, xn) ≤f (y1, y2, …, yn)

*Пример 1*. Проверить принадлежность булевой функции f(x1, x2, x3) = (0, 2, 5, 7) пяти классам Поста

*Решение*

1. Перейдем от номеров носителей к самому носителю f(x1, x2, x3) = (000, 010, 101, 111).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| m | x1 | x2 | x3 | f |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

1. Проверим принадлежность классу T0.

Вычислим f(000): f(000) = 1, поэтому f не сохраняет 0 и не принадлежит классу T0.

1. Проверим принадлежность классу T1.

Вычислим f(111): f(111) = 1, поэтому f сохраняет 1 и принадлежит классу T1.

1. Проверим принадлежность классу S.

Вычислим двойственную функцию: вектор-столбец значений исходной булевой функции имеет вид: f(x1, x2, x3) = [10100101]T .

Беря отрицание каждого элемента, получим столбец значений двойственной функции:

f\*(x1, x2, x3) = [01011010]T.

Поскольку f≠f\*, то функция f не принадлежит к классу S.

1. Проверим принадлежность классу L.

Найдем полином Жегалкина

а) добавим к таблице истинности столбец «треугольника Паскаля» и заполним его согласно следующему правилу:

* в нулевую строку выпишем транспонированный вектор-столбец значений;
* элементы последующих строк получаются последовательным сложением по модулю 2 двух вышестоящих чисел предыдущей строки;
* добавим столбец «Слагаемые»;
* определим вектор-столбец λ, состоящий из лидеров каждой строки треугольника; выделим слагаемые с лидером 1;
* сложив по модулю 2 выделенные слагаемые, получим многочлен Жегалкина f(x1,x2,x3) = 1⊕x1⊕x3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m | x1 | x2 | x3 | f | Треугольник Паскаля | Слагаемые |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | x3 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |  |  | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | x2 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |  |  | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | x2x3 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  | 1 | 1 | 1 | 1 | x1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 | x1x3 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | x1x2 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |  | 0 | x1x2x3 |

Т.к. найденный многочлен Жегалкина имеет вид многочлена первой степени, то функция f принадлежит классу L.

1. Проверим принадлежность классу M.

Найдем минимальную дизъюнктивную форму с помощью карт Карно: f =

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | x1x2 |  |  |
| x3 |  | 1 | 1 |  |
|  | 1 |  |  | 1 |

Т.к. минимальная ДНФ содержит отрицания, то, согласно критерию монотонности, она не является монотонной.

Например, 000 ≤ 100, но при этом 1 = f (000) >f (100) = 0.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** Проверить принадлежность булевой функции f(x1, x2, x3) = (0, 2, 5, 7) пяти классам Поста

**I вариант**f(x1, x2, x3, x4) = (0, 2, 3, 4, 7)

**II вариант** f(x1, x2, x3, x4) = (0, 1, 4, 5, 7)

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что называют функционально полной системой функций? Сформулируйте теорему Поста-Яблонского.
2. Что такое полином Жегалкина?

Практическая работа № 5

**МНОЖЕСТВА И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ НА ДИАГРАММАХ ЭЙЛЕРА-ВЕННА.**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться выполнять операции над множествами и представлять множества кругами Эйлера.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Совокупность элементов, объединенных некоторым признаком, образует **множество**. Над множествами можно совершать следующие операции:

1. **Объединение (А∪В)** – включает элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А и В.
2. **Пересечение (A∩B)** – включает элементы, которые одновременно принадлежат А и В.
3. **Разность (А\В)** – включает элементы, которые принадлежат А и не принадлежат В.
4. **Дополнение (А’)** – включает элементы, которые не принадлежат множеству А (т.е. дополняют его до универсального U).
5. **Декартово произведение (АхВ)** – включает упорядоченные пары (а, b), в которых первый элемент а ∈А, второй элемент b∈ В.

*Пример 1.*На множестве U букв русского алфавита заданы множества:

А = {л, о, г, и, к, а}

В = {у, р, о, к}

С = {г, р, у, п, п, а}

Найти следующие множества: А) (A∩B)∪C; Б) (А∪В)∩С; В) U\( А∪В∪C)

*Решение*

А) (A∩B)∪C

Сначала определим пересечение множеств А и В (A∩B), которое включает буквы, принадлежащие одновременно множествам А и В.

A∩B = {o, к}

Объединим получившиеся пересечение с множеством С. Объединение будет содержать элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств: (A∩B)∪C = {о, к, г, р, у, п, п, а}

Б) (А∪В)∩С

Объединение множеств А∪В = {л, о, г, и, к, а, у, р}

(А∪В)∩С = {г, а, у, р}

В) U\(А∪В∪C)

Объединение множеств А∪В∪C = {л, о, г, и, к, а, у, р, п}

Универсальным множеством является множество букв русского алфавита, поэтому в разности U\(А∪В∪C) будут содержаться буквы алфавиты, не входящие в объединение (А∪В∪C)

U\(А∪В∪C) = {б, в, д, е, ё, ж, з, и, й, м, н, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ь, ы, э, ю, я}

*Пример 2*. Даны отрезки А = [-5, 1], В = [0, 2], С = [2, 7].

Найти следующие множества: А) (A∪B); Б) (А∩В)∪С; В) (С∪В)\(А∩В)

*Решение*

Нарисуем числовую ось и отметим на ней точки отрезков:

В

А

-5

0

2

7

1

С

А) (A∪B) = [-5, 2]

Б) (А∩В)∪С = [0, 1] ∪С = [0, 1] ∪ [2, 7].

В) (С∪В)\(А∩В) = [0, 7] \ [0, 1] = [1, 7]

*Пример 3*. Доказать равенство А\В = А∩В’ аналитически и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

*Решение.*

1. Для доказательства равенства двух множеств аналитически нужно показать, что каждое из множеств является подмножеством другого. Это можно осуществить, выбирая произвольный элемент одного множества и доказывая, что он принадлежит другому множеству.

а ∈ А\В ↔ (а∈А) и (а∉В) – по определению разности А\В

 ↔ (а∈А) и (а∈B’) – по определению дополнения

 ↔ а∈А∩В’ – по определению пересечения.

Равенство А\В = А∩В’ доказано.

2) Чтобы доказать равенство двух множеств графически, необходимо изобразить диаграммы Эйлера-Венна для каждого множества и показать, что области данных множеств совпадают.



**А∩В’**

**А\В**

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** Укажите множество элементов множества, соответствующие записи. Выпишите один элемент, принадлежащий множеству, и один элемент, не принадлежащий этому множеству.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| M = {x| x2 +2x + 2 > 0} | M = {x| x2 - 5x + 6 < 0} | M = {x| x2 - x - 12 ≤ 0} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| M = {x| x2 +x - 20< 0} | M = {x| x2- 8x - 9≥ 0} | M = {x| x2 + 10x + 21> 0} |

***Задание 2.*** На множестве U букв русского алфавита заданы множества А, В, С. Найти следующие множества и изобразить их кругами Эйлера.

А) (A∩B)∪C; Б) (А∪В)∩С; В) U\( А∪В∪C)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А = {д, о, с, к, а} В = {л, о, д, к, а}С = {к, н, и, г, а} | А = {г, р, у, ш, а} В = {б, у, г, о, р}С = {к, н, и, г, а} | А = {м, о, р, я, к} В = {я, к, о, р, ь}С = {к, р, о, н, а} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = {б, и, л, е, т} В = {б, и, р, к, а}С = {т, а, л, о, н} | А = {з, а, в, о, д} В = {н, а, р, о, д}С = {д, о, с, к, а} | А = {п, а, л, е, ц} В = {ц, а, п, л, я}С = {п, е, т, л, я} |

***Задание 3.*** Даны отрезки А, В, С. Найти следующие множества:

А) (A∪B); Б) (А∩В)∪С; В) (С∪В)\(А∩В)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А = [-2, 7]; В = [3, 10]; C = [5, 15] | А = [-4, 2]; В = [0, 6]; C = [3, 9] | А = [0, 8]; В = [4, 12]; C = [9, 20] |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = [-6, 0]; В = [-3, 5]; C = [2, 8] | А = [0, 4]; В = [2, 9]; C = [5, 11] | А = [-1, 8]; В = [4, 13]; C = [6, 17] |

***Задание 4.*** Даны множества А, В. Определить декартово произведение множеств А) AхB; Б) АхА

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| А = {8, 9, 10} В = {а, б} | А = {а, б, с} В = {3, 4} | А = {5, 6, 8} В = {л, к} |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| А = {о, п, р} В = {0, 1} | А = {1, 5, 10} В = {к, н} | А = {д, г, в} В = {20, 21} |

***Задание 5.*** Доказать равенство аналитическим способом и с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  | **III вариант**  |
| (А∪В) ∩C=(A∩C) ∪(B∩C) | (А∩В)∪C=(A∪C)∩(B∪C) | (А∩В)’ = A’∪B’  |
| **IV вариант** | **V вариант** | **VI вариант** |
| (А∪В)’ = A’∩B’ | (A\B)∩C = (A∩C)\B | A\(B∪C ) = ( A\B)∩( A\C) |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какими способами можно задать множество?
2. Поставьте в соответствие операциям над множествами логические операции?
3. Как можно доказать теоретико-множественные соотношения?

Практическая работа № 6

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ.**

**ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ И АЛГЕБРА ПОДСТАНОВОК**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться определять свойства бинарных отношений, выполнять операции над бинарными отношениями и подстановками.

Для выполнения работы необходимо знать основные принципы теории множеств; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Бинарным отношением** называется любое непустое подмножество R декартова произведения XxY множеств X и Y.

Запись бинарного отношения: xRy, читается как «х и y находятся в отношении R.

**Свойства бинарных отношений.**

1. ***Рефлективност*ь**: xRx.
2. ***Антирефлективность***. Имеет место, когда отношение не обладает свойством рефлективности для любых х.
3. ***Симметричность*.** Если для любых x и y одновременно справедливо xRy и yRx.
4. ***Антисимметричность****.* Если для несовпадающих элементов x и y верно отношение xRy, то ложно yRx.
5. ***Транзитивность*.** Если xRy и yRz, то xRz.
6. ***Антитранзитивность.***Имеет место, когда отношение не обладает свойством транзитивности.
7. ***Полнота (или связность)***. Для любыхx и y выполняется либо xRy, либо yRx, либо и то и другое.

*Пример 1*. Определите, является ли отношение «соседи по дому» на множестве людей рефлективным, симметричным и транзитивным.

*Решение.*

Пусть М – множество соседей. Проверим выполнение свойств рефлективности, симметричности и транзитивности для отношения R(x,y) = «x сосед y»

А) Отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, так как любой человек не является своим соседом.

«x сосед х» - ложно.

Б) Оно симметрично. Например, если Иванов – сосед Петрова, то справедливо, что Петров – сосед Иванова.

Если «x сосед y», то «y сосед х».

В) отношение не транзитивно. Например, если дом Петрова расположен строго между домами Иванова и Сидорова, то Иванов с Петровым и Петров с Сидоровым – соседи, но Иванов и Сидоров соседями не являются.

Из того, что «x сосед y» и «y сосед z» не следует «x сосед z».

*Ответ:* отношение «соседи» на множестве людей не рефлективно, симметрично, не транзитивно.

*Пример 2.* Определите является отношение R(x,y) = «x – y есть целое число» отношением рефлективности, симметричности и транзитивности. Является ли данное отношение отношением эквивалентности?

*Решение*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Свойство | Конкретный пример выполнения алгоритма |
| 1 | Рефлективность  | Проверим R(x,x): х – х = 0 ∈ZОтношение R рефлективно. |
| 2 | Симметричность  | Если разность x – y есть целое число, то и разность y – x = - (x – y) – противоположное исходному целому, и поэтому тоже целое число. Отношение R симметрично.  |
| 3 | Транзитивность  | Пусть (х – y) ∈Z и (y – z) ∈ZТогда (х – z) = (х – y) + (y – z) есть сумма целых числе, т.е. (х – z) ∈Z.Отношение R транзитивно. |

*Ответ:* отношение «x – y есть целое число» на множестве целых числе рефлективно, симметрично, транзитивно, следовательно отношение эквивалентно.

*Пример 3*. На множестве М = {a, b, c, d, e} задано бинарное отношение R(M) = {(a, a), (a, b),

(b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}. Построить отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.

*Решение*

1. По определению **обратное бинарное отношение** должно содержать все обратные пары исходного бинарного отношения:

R-1 = {(a, a), (b, a), (c, b), (d, c), (d, d), (e, d)}

1. По определению на множестве М = {a, b, c, d, e} **дополнительное** к R(M) бинарное отношение должно содержать все пары из декартова произведения, которые не принадлежат к R(M).

 = {(a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}

1. По определению **тождественное бинарное отношение** состоит из тождественных элементов.

U = {(a, a), (b, b),(c, c), (d, d), (e, e)}

1. По определению универсальное бинарное отношение содержит все пары из декартова произведения.

I = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)}

Существуют несколько основных способов задания бинарных отношений: перечисление, графическое представление, матричное представление.

При графическом представлении каждый элемент множества М представляется вершиной, а пара (x, y) представляется дугой из x в y.

Матричным способом бинарные отношения задаются с помощью матрицы смежности. Матрица смежности представляет собой квадратную матрицу mxm, где m – мощность множества М и каждый ее элемент равен единице, если пара (x, y) принадлежит R(M), и равен нулю в противном случае.

*Пример 4.* Записать графическое и матричное представление для R(M) = {(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (d, d), (d, e)}}

*Решение*



Взаимно-однозначное отображение множества {1,2,3, …,n} на само себя называется **подстановкой** n чисел, где n – степень подстановки.

Обычно подстановку записывают в виде двух строк, заключенных в скобки. При этом в первой строке аргументы (первые координаты), а во второй строке в соответствующие им образы (вторые координаты).

*Пример 5.* Дана подстановка:

1) Приведите подстановку σ1 к каноническому виду

2) Найдите обратную подстановку σ1-1

3) Найдите квадрат подстановки σ12

*Решение*

1. В верхней строке запишем числа в порядке возрастания от 1 до 5. В нижней – соответствующие им значения σ1(1) =5, σ1(2) = 4, σ1(3) = 1, σ1(4) = 2, σ1(5) = 3.

Получим - **канонический вид подстановки**

1. В каноническом виде подстановки σ1 поменяем строки местами и упорядочим пары (приведем к каноническому виду) по новой первой строке.

 – **обратная подстановка**

1. Определим квадрат подстановки σ12

А) поменяем в каноническом виде подстановки σ1 порядок столбцов так, чтобы новая строка повторяла старую вторую.

Б) подпишем подстановку под постановкой σ1 и вычеркнем одинаковые вторую и третью строки:

Получим

**квадрат подстановки**

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.***

*Объясните, будет ли выполнима рефлективность, симметричность или транзитивность отношений на заданных множествах, и почему:*

**I вариант** «быть знакомым» на множестве людей

**II вариант** «быть отцом» на множестве людей

**III вариант** «играть в одном спектакле» на множестве актеров

**IV вариант** быть одногруппником» на множестве людей

***Задание 2.***

*Определите является ли преложенное отношение рефлектиным, симметричным и транзитивным*.

**I вариант** «x/y – целое число»

**II вариант** «x/y – рациональное число»

**III вариант** «x + y – четное число»

**IV вариант** «xy – четное число»

***Задание 3.****На множестве М = {a, b, c, 1, 2} задано бинарное отношение R(M).*

*А) Постройте отношения: обратное к R, дополнительное к R, тождественное бинарное отношение U и универсальное бинарное отношение I.*

*Б) Запишите графическое и матричное представление данных бинарных отношений.*

**I вариант**R(M) = {(a, 2), (b, 1), (b, 1), (c, c), (c, 2), (2, 2)}

**II вариант** R(M) = {(a, b), (a, 1), (b, b), (c, 2), (1, 2), (2, 2)}

**III вариант**R(M) = {(a, a), (a, c), (b, c), (b, 1), (c, c), (2, 2)}

**IV вариант** R(M) = {(a, c), (b, b), (b, c), (c, 1), (1, 1), (1, 2)}

***Задание 4. Выполните операции над подстановками***

*1) Приведите подстановку σ1 к каноническому виду*

*2) Найдите обратную подстановку σ1-1*

*3) Найдите произведение подстановок σ1 °σ2*

*4) Найдите квадрат подстановки σ12*

**I вариант**

**II вариант**

**III вариант**

**IV вариант**

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какое бинарное отношение обладает свойством эквивалентности?
2. Что такое отображение?

Практическая работа № 7

**НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИСТИННОСТИ ПРЕДИКАТА. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ.**

**ПОСТРОЕНИЕ ОТРИЦАНИЙ К ПРЕДИКАТАМ, СОДЕРЖАЩИМ КВАНТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться находить область определения и истинности предиката; выполнять логические операции над предикатами; формализовывать предложения, используя предикаты и кванторы; строить отрицания к высказываниям, содержащим кванторы.

Для выполнения работы необходимо знать основы языка и алгебру предикатов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Предикатом** называется предложение, содержащее одну или несколько переменных, при подстановке в которые конкретных значений, предложение обращается в высказывание.

Множество М, на котором определен предикат P(х), называется областью **определения предиката**.

Множество всех элементов х ∈ М , при которых предикат принимает значение «истина», называется **множеством истинности предиката (Т).**

***Пример 1.*** Найти множество истинности предиката Р(х): 6х2 – 24 = 0, если его область определения множество всех действительных чисел.

*Решение*

Для нахождения множества истинности предиката определим корни уравнения:

6х2 – 24 = 0

x2 = 4

x1= -2, x2 = 2.

*Ответ:* Множество истинности Т(Р) = {-2, 2}.

Для предикатов определены логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция и следование.

***Пример 2***. На множестве М = {1, 2, 3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 4»; B (x): «x – нечетное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 5». Определить предикаты A(x) &D(x); С (x); (x); D (x) и найти их множества истинности.

*Решение*

1. Найдем множества истинности для исходных предикатов:

Т(А) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19}

Т(В) = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

Т(С) = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

Т(D) = {5, 10, 15, 20}

1. A(x) &D(x): «число х не делится на 4 и кратно 5»

Т(А&D) = {5, 15}

1. С (x): «число х не делится на 4 или простое»

Т(А∨С) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 15, 19}

1. (x): «х делится на 4» Т() = {4, 8, 12, 16, 20}
2. D (x): «если х нечетное число, то оно кратно 5»

Т(В→D) = T (∨D)

T () = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

T (∨D) = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

Кроме логических операций над предикатами также определены две кванторные опреации: квантор общности и квантор существования.

**Квантор общности (универсальный квантор) -** ∀х.

**∀хР(х)** – для всех (любого) х истинно Р(х). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда предикат Р(х) выполняется для каждого значения переменного х.

**Квантор существования** - ∃х.

**∃хР(х) –** существует х, такой что истинно Р(х). Это высказывание истинно тогда и только тогда, когда для некоторых значениях х выполняется предикат Р(х).

***Пример 3.*** Запишите высказывание для символичной записи (∃х)(∃y): (x2+ y2> 25).

Определите истинность высказывания, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

*Решение*

Данную запись можно представить высказыванием: существует х и существует y, такие что x2+ y2> 25. Высказывание является истинным, т.к. можно найти пару чисел х и y, для которых будет выполняться выражение x2+ y2> 25 (например, х = 3 и y = 5).

***Пример 4.*** Запишите высказывание «На каждой улице будет праздник» в символичной форме, введя предикаты.

*Решение*

1. Найдем область определения

М: х – множество всех улиц

y – множество всех праздников

1. Введем предикат P(x, y): x имеет свой Y.

Данное высказывание в симвоичной форме запишется в виде: (∀x)( ∃y)P(x, y)

Для построения отрицания высказываний, содержащих квантор , достаточно заменить его на другой квантор и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

***Пример 5.*** Для данных высказываний построить их отрицание.

1) A: «Все целые числа являются простыми».

Данное высказывание содержит квантор общности (слово «все»), заменим его на квантор существования (слово «некоторые») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

: «Некоторые целые числа не являются простыми»

2) А: «Некоторые люди любят есть репу»

 Данное высказывание содержит квантор существования (слово «некоторые»), заменим его на квантор общности («все») и добавим отрицание с помощью частицы «не».

: «Все люди не любят есть репу».

Для неформальной проверки правильности умозаключений, включающих утверждения типа «для всех» и «для некоторого», используются диаграммы Эйлера, которые состоят из кругов, изображающих множества.

Утверждению "Все р есть q" соответствует диаграмма, приведенная на рис. 1. На ней круг, изображающий множество р, содержится в круге, изображающем множество q.

Утверждение "Некоторые р есть q" представляется диаграммой на рис. 2. На этой диаграмме пересечение кругов, изображающих множества р и q, непусто.

P

Q

P

Q

рис. 1 рис. 2

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

***Задание 1.*** Найти множества истинности данных предикатов, если их область определения множество всех действительных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| А) **P (x):** x2 – 4 = 0;Б) **Q(x):** 3x – 2 < 17 | А) **P(x):** 2x2 – 18 = 0;Б) **Q(x):** 2x + 3 < 15 |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| А) **P(x):** 3x2 – 12 = 0;Б) **Q(x):** 5x – 4 > 29 | А) **P(x):** x2 – 9 = 0;Б) **Q(x):** 4x+ 6> 12 |

***Задание 2.*** На множестве М = {1,2,3, … ,20} заданы предикаты: A (x): «x не делится на 5»; B (x): «x – четное число»; C (x): «x – число простое»; D (x): «x кратно 3». Определить следующие предикаты и найти их множества истинности:

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| A (x) & B(x); D (x); (x); C (x); | C (x) & B (x); D (x); (x); A (x); |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| C (x) &D (x);C (x); (x);(x); | B (x) & D (x); B (x); (x); B (x); |

***Задание 3.*** Записать высказывание и определить его истинность, считая, что все переменные принадлежат множеству действительных чисел.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| (∃x) (∀y): (x + y = 10)(∀x) (∃y) (∃z): x\*y = z | (∀x) (∃y): (x + y = 8)(∀х) (∀y): (х>y) |
| **III вариант** | **IV вариант** |
| (∀x) (∃y) (x–y = 7)(∀х) (∀y): (х+y>0) | (∃x) (∀y) (x – y = 5)(∀z) (∃y) (∃x): x + y = z |

***Задание 4.*** Записать предложенное высказывание в символичной форме, введя предикаты.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант**  | **II вариант**  |
| У каждого человека есть мать. Некоторые студенты – второкурсники.  | Существуют города, которые больше Москвы.На каждом доме есть номер. |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| Каждое материальное тело имеет массу.Существуют кустарники, которые больше чем деревья. | Некоторые космические тела являются астероидами.У любой группы есть классный руководитель |

***Задание 5.*** Постройте отрицание к высказываниям, содержащим кванторы***.***

|  |  |
| --- | --- |
|  **I вариант**  | **II вариант**  |
| Все планеты имеют атмосферу.Некоторые люди ходят в театр. | Некоторые студенты учатся на «отлично».Все птицы улетают зимой в теплые края. |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| Некоторые машины красного цвета.Все компьютеры подключены к Интернету. | Все кошки любят молоко.Некоторые приборы исправны. |

***Задание 6.*** Проверьте правильность умозаключений.

|  |  |
| --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант**  |
| 1. Все адвокаты богаты. Все богатые едят омаров. Все адвокаты едят омаров.
2. Некоторые адвокаты богаты. Некоторые врачи богаты. Некоторые врачи – адвокаты.
 | 1. Некоторые марсиане зеленые. Все елки зеленые. Некоторые марсиане – елки.
2. Все мужчины любят мясо. Некоторые учителя – мужчины. Некоторые учителя любят мясо.
 |
| **III вариант**  | **IV вариант** |
| 1. Все врачи любят музыку. Все поэты любят музыку. Все врачи – поэты.
2. Некоторые врачи умные. Все умные люди поэты. Некоторые врачи – поэты.
 | 1. Все машины дорогие. Велосипед не дорогой. Велосипед – не машина.
2. Все мужчины смотрят телевизор. Некоторые слесари – мужчины. Некоторые слесари смотрят телевизор.
 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. При каких условиях высказывания ∀хР(х) и∃хР(х) истинны?
2. Где используются предикаты и кванторы?
3. Как с помощью диаграмм Эйлера строятся высказывания содержащие кванторы общности и существования?

Практическая работа № 8

**ГРАФЫ. ИССЛЕДОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ И СВОЙСТВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** научиться определять основные характеристики графов и решать задачи с их применением.

Для выполнения работы необходимо знать основные понятия теории графов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

**ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:**90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

***Графом***G = (V, X) называется пара двух конечных множеств: V – множества вершин и Х – множества ребер. Если у ребер не указано направление, то такой граф называется ***неориентированным***, у ***ориентированного*** графа каждое ребро имеет направление.

***Мультиграфом***называется граф, содержащий кратные ребра.

***Псевдографом***называется граф, содержащий петли или/и кратные ребра.

***Степенью вершины*** графа deg(V) называется количество ребер ей инцидентных.

**Операции над графами:**

1. Объединение графов включает все вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
2. Пересечение графов включает только одинаковые вершины и ребра, которые содержатся в исходных графах.
3. Кольцевая сумма содержит объединение графов без их пересечения.
4. Дополнение содержит те вершины и ребра, которые не хватает исходному графу до полного графа.

***Эйлеровым графом*** называется граф, содержащий эйлеров цикл (цикл, содержащий все ребра графа только один раз).

***Гамильтоновым графом*** называется граф, содержащий гамильтонов цикл (цикл, проходящий через каждую вершину только один раз).

***Матрицей инцидентности*** неориентированного графа (неографа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершинам) и m столбцов (ребер), в которой могут быть следующие значения:

* 1, если вершина инцидента ребру
* 0, если вершина не инцидентна ребру
* 2, если ребро является петлей.

***Матрицей инцидентности*** ориентированного графа (ортграфа) называется таблица, состоящая из n строк (по числу вершин) m столбцов (ребрам), в которой могут быть следующие значения:

* -1, если вершина является началом ребра
* 0, если вершина не инцидентна ребру
* 1, если вершина является концом ребра
* ±1, если ребро является петлей.

**Матрицей** смежности графа называется квадратная матрица с n элементам (по числу вершин), в которой могут быть следующие значения:

* 0, если между вершинами нет ребра
* λ, если между вершинами есть ребро с кратностью λ

*Пример 1.*Граф G = (V, Х) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер Х = {(1, 2), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 6), (4, 5)}.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

в) Определите степень каждой вершины графа.

б) Постройте матрицу инцидентности.

г) Постройте матрицу смежности.

*Решение*

а) Соединим попарно вершины, инцидентные каждому из заданных ребер

x3

2

3

4

1

5

6

7

x1

x2

x4

x5

x6

x7

x9

x8

б) Задан неориентированный псевдограф, имеющий две пары кратных ребер: {(1, 2)2, (1, 3)2}

Граф имеет изолированную вершину 7 и петлю в вершине 2.

в) deg(1) = 4, deg(2) = 5, deg(3) = 4, deg(4) = 3, deg(5) = 1, deg(6) = 1, deg(7) = 0

г) матрица инцидентности

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 | Х6 | Х7 | Х8 | Х9 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

г) матрица смежности

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 |  | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 |  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |  | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

*Пример 2.* Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из А в F.

|  |
| --- |
| https://kpolyakov.spb.ru/school/test10/5_files/minaf.gif |

*Решение*

Изобразим с помощью графа данные таблицы. Точками обозначим населенные пункты. Там, где пункты соединены дорогой, там соединяем точки.



Нарисуем пути из пункта А в F. Начнем с конца, с пункта F.

Получим кратчайший путь AB-ВС-СE-EF = 2 + 1 + 4 + 2 = 9

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

**Задание 1.** Граф G = (V, Х) задан множеством вершин, где V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} и списком ребер.

а) Постройте граф.

б) Укажите вид графа, наличие петель, изолированных вершин и кратных ребер.

в) Определите степень каждой вершины графа.

г) Постройте матрицу инцидентности.

д) Постройте матрицу смежности.

**I вариант** Х = {(2, 3), (4, 3), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

**II вариант** Х = {(4, 5), (6, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 2), (6, 4), (2, 7), (6, 4)}

**Задание 2.** Даны два графа G1 = (V1, Х1) и G2 = (V2, Х2). Изобразите геометрически объединение графов  пересечение графов  и кольцевую сумму 

**I вариант II вариант**

А

В

С

А

D

В

C

А

В

С

А

D

В

C

G1 G2 G1 G2

**Задание 3.** Изобразите дополнения графов:



**I вариант II вариант**

**Задание 4.** Решить задачу с помощью ориентированного графа:

**I вариант.** Из пункта А в пункт В выехали пять машин одной марки разного цвета: белая, чёрная, красная, синяя, зелёная. Чёрная едет впереди синей, зелёная – впереди белой, но позади синей, красная впереди чёрной. Какая машина едет первой и какая последней?

**II вариант.** Из Череповца в Вологду выехали пятеро велосипедистов: Белов, Чернов, Краснов, Смирнов и Захаров. Чернов едет впереди Смирнова. Захаров едет впереди Белова, но позади Смирнова. Краснов – впереди Чернова. Определите, в каком порядке едут велосипедисты.

**Задание 5**. Определить является ли граф эйлеровым. Проверить теорему о четности вершин эйлерова графа. Если граф является эйлеровым, то записать эйлеров цикл.

**I вариант II вариант**



**Задание 6.** Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из А в F.

**I вариант II вариант**



**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что называют графом?
2. Охарактеризуйте виды графов.
3. Какими способами можно задать граф?

Практическая работа № 9

**РАБОТА МАШИНЫ ТЬЮРИНГА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** научиться строить машины Тьюринга и применять нормальные алгоритмы Маркова.

Для выполнения работы необходимо знать основы теории алгоритмов; необходимо уметь формулировать задачи логического характера и применять методы математической логики для их решения.

ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ: 90 минут.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Для уточнения понятия алгоритмего заменили строго формализованными математическими моделями: рекурсивные функции, машины Тьюринга и нормальные алгоритмы Маркова.

**Машина Тьюринга** состоит из ленты бесконечной длины, разделенной на ячейки, и управляющей головки, которая перемещается вдоль ленты.

Создать (запрограммировать) МТ означает создать ее **устройство управления** – нарисованную или напечатанную на листе бумаги прямоугольная таблица.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  Входные символы Состояния | s0 | s1 | s2 | sn |
| q1 |  | Команды ТМ |  |  |
| q2 |  |  |  |  |
| qn |  |  |  |  |

Команды ТМ записываются в виде: символ, направление передвижения, состояние.

*Пример 1*. На ленте есть слово, состоящее из символов #, $, 1 и 0. Составить программу, заменяющую все символы # и $ на нули. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.

*Решение*

Рассмотрим пример ленты для описанной машины Тьюринга:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0Нq0 | 1Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 |  |  |
|  | S0 | 1 | # | $ | 0 | S0 |  |

q1 – состояние изменения символа и движения влево; q1 – состояние остановки.

 Получим следующую программу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | 1 | 0 | # | $ |
| q1 | S0Hq0 | 1Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 | 0Лq1 |

*Пример 2****.*** Построить машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу на ленте. Машина должна прибавить единицу к последней цифре числа. Если последняя цифра равна 9, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа.

*Решение.* Входное слово состоит из цифр целого десятичного числа, записанных в последовательные ячейки на ленте.

Программа для данной машины Тьюринга может выглядеть так:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | S0 |
| q1 | 1Нq0 | 2Нq0 | 3Нq0 | 4Нq0 | 5Нq0 | 6Нq0 | 7Нq0 | 8Нq0 | 9Нq0 | 0Лq0 | 1Нq0 |

q1 — состояние изменения цифры, q0 — состояние останова.

*Пример 3.* Алфавит машины Тьюринга состоит из символом а,b,c. Составить программу, которая переносит первый символ непустого слова Р в его конец.

Например: 

*Решение*

Для решения этой задачи предлагается выполнить следующие действия:

1. Запомнить первый символ слова, используя различные состояния машины.
2. Стереть этот символ.
3. Перегнать автомат вправо под первую пустую клетку за словом, и записать в неё запомненный символ.

Программа будет следующей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c | S0 |  |
| q1 | S0Пq2 | S0Пq3 | S0Пq4 | S0Нq0 | q1 – анализ 1 символа, его удаление и разветвление программы |
| q2 | aПq2 | bПq2 | cПq2 | a Нq0 | q2 – запись справа а |
| q3 | aПq3 | bПq3 | cПq3 | b Нq0 | q3– запись справа b |
| q4 | aПq4 | bПq4 | cПq4 | c Нq0 | q4 – запись справас  |

**Нормальным алгоритмом Маркова** называется непустой конечный упорядоченный набор формул подстановок. **Формулой подстановки** называется запись вида α→β, где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

**Работа алгоритма Маркова состоит из нескольких шагов**:

1. Формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней, выбирается первая применимая формула, далее выполняется подстановка и получается новое слово Р1.
2. Далее полученное слово Р1 берется за исходное и снова формулы просматриваются сверху вниз, начиная с верхней и т.д.
3. Работа алгоритма повторяется до тех пор, пока либо не возникнет ситуация, когда ни одна подстановка не подходит - правило остановки; либо не будет установлено, что процесс подстановок не может остановиться.

*Пример 4*. Дано слово 1 + 2 + 2 + 1 + 4. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1. 2 + 2 →4
2. 5 + 1 →6
3. 1 + 4 →5

*Решение*

1 + + 1 + 4 + 1 + 4 + 4 6 + 4

Т.к. больше не одна подстановка не подходит, то работа алгоритма заканчивается.

**ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ**

**I вариант**

***Задание 1***. Постройте машину Тьюринга

1. На ленте есть слово, состоящее из символов %, #, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы % на # и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в пятеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 4, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: А={a,b}. Составить программу, удаляющую из слова Р его второй символ.

Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | a | b | b | a | S0 | → | S0 | b | b | a | S0 | → | S0 | a | b | a | S0 |  |
|  |  | ↑ |  |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |

***Задание 2.*** Примените подстановки нормального алгоритма Маркова

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом А={a,b} и схемой:
2. ba→ab
3. ab→λ

Примените этот алгоритм к слову bbaabab.

1. Примените к слову МУХА следующую схему НАМ:
	1. Х→К
	2. М→Р
	3. КА→ЛОН
	4. РУ→С

3. Дано слово 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:

1. 2 + 2 →4
2. 1 + 1 →2
3. 4 + 2 →6

**II вариант**

***Задание 1***. Постройте машину Тьюринга

1. На ленте есть слово, состоящее из символов №, %, 0 и 1. Разработайте программу, заменяющую все символы № на % и наоборот. В момент запуска головка находится над первой буквой слова справа. Завершается программа тогда, когда головка оказывается над пустым символом после самой левой буквы слова.
2. Постройте машину Тьюринга, которая прибавляет единицу к числу, записанному в шестеричной системе счисления. В начальный момент машина находится против самой правой цифры числа (машина должна прибавить единицу к последней цифре числа, если последняя цифра равна 5, то ее заменить на 0 и прибавить единицу к предыдущей цифре).
3. Входной алфавит машины Тьюринга: А={с,d}. Составить программу, удаляющую из слова Р его второй символ.

Т.е. надо запомнить и стереть первый символ, передвинуть головку вправо и на месте второго символа записать первый символ.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | S0 | c | d | c | d | S0 | → | S0 | D | C | d | S0 | → | S0 | c | c | d | S0 |  |
|  |  | ↑ |  |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |  | ↑ |  |  |  |  |

***Задание 2.*** Примените подстановки нормального алгоритма Маркова

1. Нормальный алгоритм задан алфавитом А={a,b} и схемой:
2. ba→ab
3. ab→λ

Примените этот алгоритм к слову aabbaab.

1. Примените к слову КОСА следующую схему НАМ:
	1. К→Р
	2. ЗА→ЛИК
	3. С→З
	4. РО→Б
2. Дано слово 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1. Какое слово получится в результате применения к нему марковских подстановок:
3. 2 + 2 →4
4. 1 + 1 →2
5. 4 + 4 →8

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Сформулируйте тезис Черча.
2. Какова основная цель теории алгоритмов?

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

*Основные источники:*

1. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2018. - 368 с.
2. Спирина М.С. Дискретная математика: Сборник задач с алгоритмами решений математика: учеб.пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. - 288 с.

*Дополнительные источники:*

1. Гусева А.И. Дискретная математика: учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. – 208 с. – СПО (электронно-библиотечная система znanium.com).
2. Гусева А.И. Дискретная математика: сборник задач / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. – 224 с. – СПО (электронно-библиотечная система znanium.com).
3. Канцедал С.А. Дискретная математика: учеб.пособие/ С.А. Канцедал. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2018. – 222с. – СПО (электронно-библиотечная система znanium.com).

*Интернет-ресурсы:*

1. Онлайн калькулятор по математической логике [Электронный ресурс]. – Форма доступа:<http://tablica-istinnosti.ru/ru/>
2. Прикладная математика. Справочник математических формул. Примеры и задачи с решениями [Электронный ресурс]. – Формадоступа: <http://www.pm298.ru>
3. Математический форум MathHelpPlanet. Обсуждение и решение задач по математике, физике, химии, экономике [Электронный ресурс] – Форма доступа: <http://mathhelpplanet.com/static.php>