Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение   
Чувашской Республики «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

**ОП.10. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

специальность

среднего профессионального образования

**09.02.07 Информационные системы и программирование**

Разработчик:

Васильева О.М., преподаватель

Чебоксары 2023

Методические указания для студентов к практическим занятиям являются частью программы подготовки специалистов среднего профессионального образования ГАПОУ ЧР «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики и составлены на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО) по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ЕН.02. Дискретная математика с элементами математической логики.

Методические указания подготовлены с целью повышения эффективности профессионального образования и самообразования в ходе практических занятий по учебной дисциплине ОП.10. Численные методы. Включенные в практические работы задачи стимулируют исследовательскую и творческую деятельность, развивают познавательные интересы, помогают не только глубже понять математику, но и научиться применять полученные знания на практике.

Методические указания содержат задания к практическим работам, порядок их выполнения, рекомендации, перечень контрольных вопросов по каждой практической работе. Приведен список основной и дополнительной литературы для подготовки к практическим работам.

Методические указания к практическим занятиям предназначены для студентов очной формы обучения.

Организация-разработчик: Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Чувашской Республики «Чебоксарский экономико-технологический колледж» Министерства образования и молодежной политики Чувашской Республики.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Пояснительная записка | 4 |
| Общие компетенции | 5 |
| Перечень практических занятий | 6 |
| Общие требования к практическим занятиям | 7 |
| Контроль выполнения практических занятий | 8 |
| Практическая работа №1 «Вычисление погрешностей арифметических действий и действия с приближенными числами» | 9 |
| Практическая работа №2 «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций» | 15 |
| Практическая работа №3 «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных» | 19 |
| Практическая работа №4 «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса» | 22 |
| Практическая работа №5«Решение систем линейных алгебраических уравнений методом итераций и методом Зейделя» | 30 |
| Практическая работа №6 «Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона» | 37 |
| Практическая работа № 7 «Интерполирование сплайнами» | 39 |
| Практическая работа №8 «Вычисление интегралов при помощи формул Ньютона-Котеса» | 42 |
| Практическая работа №9 «Вычисление интегралов при помощи формул Гаусса» | 46 |
| Практическая работа №10 «Нахождение решения обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера» | 48 |
| Практическая работа №11 «Нахождение решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта» | 50 |
| Литература | 54 |

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины ОП.10. Численные методы для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Методические указания предназначены для организации учебного процесса по данной дисциплине, а также подготовки и проведению практических занятий и их проверки.

Выполнение студентами практических работ по дисциплине проводится с целью:

- закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;

- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;

- формирования умений решать практические задачи;

- развития самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий;

- подготовки к экзамену.

Выполнению практических работ предшествует проверка знаний студентов – их теоретической готовности к выполнению задания.

Во время выполнения практической работы используется индивидуальная форма организации работы обучающихся. При индивидуальной форме организации занятий каждый обучающийся самостоятельно выполняет задание согласно своему варианту.

Каждая практическая работа оформляется в тетради для практических работ. В оформление работы входит запись номера практической работы, темы, цели, задания с решением, ответов на контрольные вопросы.

**ОБЩИЕ КОМПЕТЕНЦИИ**

Выполнение практических работ по дисциплине ОП. 10 Численные методы направлено на формирование общих и профессиональных компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учётом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.

ПК 5.1. Собирать исходные данные для разработки проектной документации на информационную систему.

ПК 9.2. Разрабатывать веб-приложение в соответствии с техническим заданием.

**ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Наименование тем занятий, практической работы** | **Кол-во часов** | **Форма контроля** |
| **Тема 1. Элементы теории погрешностей** |  |  |
| 1. Вычисление погрешностей арифметических действий и действия с приближенными числами. | 2 | письменная работа |
| **Тема 2. Приближённые решения алгебраических и трансцендентных уравнений** |  |  |
| 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций. | 2 | письменная работа |
| 3. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных. | 2 | письменная работа |
| **Тема 3. Решение систем линейных алгебраических уравнений** |  |  |
| 4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. | 2 | письменная работа |
| 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом итераций и методом Зейделя. | 2 | письменная работа |
| **Тема 4. Интерполирование и экстраполирование функций** |  |  |
| 6. Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона. | 2 | письменная работа |
| 7. Интерполирование сплайнами. | 2 | письменная работа |
| **Тема 5. Численное интегрирование** |  |  |
| 8. Вычисление интегралов при помощи формул Ньютона-Котеса. | 2 | письменная работа |
| 9. Вычисление интегралов при помощи формул Гаусса. | 2 | письменная работа |
| **Тема 6. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений** |  |  |
| 10. Нахождение решения обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера. | 2 | письменная работа |
| 11. Нахождение решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта. | 2 | письменная работа |
| **Итого** | 22 |  |

**ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

Ознакомление с заданием и предварительная подготовка к работе.

Практические занятия проводят согласно учебному плану под руководством преподавателя.

1. Предварительная подготовка к выполнению практической работы состоит в следующем:

Преподаватель заранее объявляет о предстоящий практической работе, информирует о содержании и целях работы, порядке ее подготовки и выполнения.

Преподаватель предлагает обучающимся самостоятельное (внеаудиторное)выполнение задания по подготовке к практической работе.

Обучающиеся повторяют теоретический материал к заданной теме, изучают главы параграфов, указанных преподавателем, конспекты.

2. Подготовка и проведение практического занятия.

Преподаватель подробно инструктирует обучающихся о ходе предстоящей работы: называет тему, цели, требования к выполнению работы, особенности заданий, объяснение методов (способов, приемов) их выполнения, критерии оценки.

Преподаватель выдает бланки заданий обучающимся, обучающиеся приступают к выполнению работы: читают задание, задают вопросы, в тетрадь записывают решения, производят расчеты, оформляют ответы и т. д.

В течение практического занятия преподаватель контролирует правильность выполнения заданий, сопровождает дополнительными разъяснениями по ходу работы (при необходимости).

В конце практического занятия проводиться подведение итогов, выставляются оценки результатов работы отдельных студентов, ответы на вопросы студентов, выдача рекомендаций по устранению пробелов в системе знаний и умений студентов, по улучшению результатов работы, задание на дом для закрепления пройденного материала и по подготовке к следующему практическому занятию.

3. Требования к выполнению заданий.

Задания необходимо выполнять с максимальной точностью.

Обучающийся должен стремится к аккуратности, полноте записей. В зависимости от задания, решения должны содержать: расчеты, формулы, заполненные таблицы, графики пр.

**КОНТРОЛЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

Критерии оценки

Отметка «5» ставится, если: работа выполнена верно и полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если: работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки); выполнено без недочетов не менее 3/4 заданий.

Отметка «3» ставится, если: допущены более одной ошибки или более трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; без недочетов выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории существенных ошибок следует отнести ошибки, которые обнаруживают незнание обучающимися формул, правил, основных свойств, теорем и неумение их применять; незнание приемов решения задач, рассматриваемых в учебниках, а также вычислительные ошибки, если они не являются опиской.

К категории несущественных ошибок следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

К недочетам относятся нерациональное решение, описки, недостаточность или отсутствие пояснений, обоснований в решениях.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Практическая работа № 1

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ И ДЕЙСТВИЯ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** закрепить умения вычислять погрешности результатов арифметических действий; закрепить умения определять количество верных цифр в числе, вычислять относительные и абсолютные погрешности.

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:** Программа MS Office Excel.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**Приближение числа. Погрешности приближённых значений чисел**

Пусть X-точное значение некоторой величины, *x* - наилучшее приближение этой величины.

**Определение*:*** *Абсолютной погрешностью ех приближенного значения числа Х называется модуль разности между точным числом Х его приближенным значением х, т.е.*

*ех* = ⏐Х-х ⏐.

**Определение*:*** *Число х называется приближённым значением точного числа Х с точностью до Δх, если абсолютная погрешность приближённого значения a не превышает Δх, т.е.* ⏐Х-х ⏐≤ Δх .

**Определение*:*** *Число Δх называется границей абсолютной погрешности приближённого значения числа х.*

Число Δх на практике стараются подобрать как можно меньше и простое по записи.

Из неравенства (1) найдём границы, в которых заключено точное значение числа Х:

х - Δх ≤ Х ≤ х + Δх.

НГх= х - Δх - нижняя граница приближения величины Х.

ВГх= х +Δх - верхняя граница приближения величины Х.

**Определение:** *Относительной погрешностью  приближенного числа х числа Х называется отношение абсолютной погрешности Δх этого приближения к числу х, т.е.*



Если первая значащая цифра в относительной погрешности  меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства **,** где *n*- количество верных цифр.

***Вычисление погрешностей арифметических действий***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **х#у** | **∆(х#у)** | **Δ(х#у)** |
| х+у | x+y |  |
| х-у | x+y |  |
| ху |  |  |
| х/у |  |  |

***Оценка погрешностей значений функций***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| f(x) |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| sin x |  |  |
| cos x |  |  |
| tg x |  |  |
| ln x |  |  |
| lg x |  |  |
|  |  |  |
| arcsin x |  |  |
| arccos x |  |  |
| arctg x |  |  |
|  |  |  |

**Способы приближенных вычислений по заданной формуле**

* 1. ***Вычисление по правилам подсчета цифр***

При вычислении данным методом явного учёта погрешностей не ведётся, правила подсчёта цифр показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надёжными.

*Правила метода:*

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.
2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.
3. При определении количества верных цифр в значениях функций от приближённых значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной.
4. В записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем описано в правилах 1-3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

Правила подсчёта цифр носят оценочный характер, но практическая надёжность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчётная таблица – расписка формул.

**Пример:** Вычислить значение функции , а = 2,156, b = 0,927.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а | 2,156 | пояснения при подсчете верных цифр |
| b | 0,927 |
|  | 8,63**7** | = 8,63652,  оценим производную ()’ = , значит (используя правило 3), надо сохранить на один знак меньше, чем в значении аргумента + 1 запасная цифра. |
|  | 0,962**8** | = 0,9628083,  оценим производную , (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра. |
| + | 9,60**0** | +=8,637+0,9628=9,5998,  (по правилу 1)результат округляется до трёх знаков после запятой, т.е. 9,600. |
|  | 0,859**3** | ,  (по правилу 2) результат округляем до трех цифр, как аргумент + 1 запасная цифра. |
|  | 3,015**3** | ,  (используя правило 1)округляем результат до трех цифр + 1 запасная цифра. |
|  | 1,103**7** | ,  оценим производную , (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра. |
| A | 8,69**8** | ,  при округлении результата использовали правило 2. |
| А | 8,70 | 8-запасная цифра,  По правилу 4, запасная цифра в окончательном результате округляется |

* 1. ***Вычисление со строгим учётом предельных абсолютных погрешностей***

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей. При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты, так же как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей – для результатов и их погрешностей. В таблице приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в предыдущем примере, и в предположении, что исходные данные a и b имеют предельные абсолютные погрешности , т.е. у *a* и *b* все цифры верны.

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры; значения погрешностей для удобства округляются (*с возрастанием*!) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе.

**Пример:** Вычислить значение функции , а = 2,156, b = 0,927.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а | b |  |  | + |  | a+ | ln(a+) | A |
| 2,156 | 0,927 | 8,63**7** | 0,962**8** | 9,60**3** | 0,86**0** | 3,01**6** | 1,10**4** | 8,7**0** |
| а | b | () | () | (+) | () | (a+) | ln(a+) | A |
| 0,0005 | 0,0005 | 0,0049 | 0,00027 | 0,0054 | 0,0016 | 0,0021 | 0,00076 | 0,016 |

Используя калькулятор, имеем .

При вычислении предельных абсолютных погрешностей используем таблицу 1.2. .

Судя по ее величине, в полученном значении экспоненты в строгом смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой: и вносим его в таблицу.

При этом возникает погрешность округления: 8,637-8,63652=0,00048.

Вслед за этим вычисляем полную погрешность полученного результата (погрешность действия плюс погрешность округления: 0,0044+0,00048=0,0049), которую так же вносим в таблицу.

Все последующие действия выполняем аналогично с применением соответствующих формул для предельных абсолютных погрешностей.

Округляя окончательный результат до последней верной в строгом смысле цифры, а так же округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем: А = 8,7 0,1.

Вычисления по методу строго учёта предельных абсолютных погрешностей можно выполнить на компьютере с помощью программы. Если не производить пооперационного учёта движения вычислительной ошибки, то достаточно вычислить значение предельной абсолютной погрешности окончательного результата, а затем произвести его округление.

* 1. ***Вычисление по методу границ***

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений – *метод границ*.

Пусть *f(x, y)* – функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y. Нужно получить её значение *f(a, b),* где *a* и *b* – приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

; .

Здесь НГ, ВГ - обозначение соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения (a, b) при известных границах значений a и b.

Допустим, что функция *f(x, y)* возрастает по каждому из аргументов x и y. Тогда

.

Пусть теперь *f(x, y)* возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано неравенство

.

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий. Пусть . Тогда очевидно, что

.

Точно так же для функции (она по x возрастает, а по y убывает) имеем

.

Аналогично для умножения и деления:



Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк – отдельно для вычисления НГ и ВГ результата (по этой причине метод границ называют ещё методом двоичных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчёта цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведётся по недостатку, а верхних по – избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

**Пример:** Вычислить значение функции , а = 2,156, b = 0,927.

Нижняя и верхняя границы значений a и b определены из условия, что в исходных данных а = 2,156 и b = 0, 927 все цифры верны (,

т.е. 2,1555 < a < 2,1565; 0,9265 < b < 0,9275.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | а | b |  |  | + |  | a+ | ln(a+) | A |
| НГ | 2,1555 | 0,9265 | 8,6322**0** | 0,9625**5** | 9,5947**5** | 0,8584**0** | 3,0143**4** | 1,1033**8** | 8,6894 |
| ВГ | 2,1565 | 0,9275 | 8,6408**4** | 0,9630**7** | 9,6039**1** | 0,8602**6** | 3,0167**6** | 1,1041**9** | 8,7041 |

Таким образом, результат вычислений значения А по методу границ имеет вид 8,6894 < А < 8,7041.

По результатам вычислений получаем



что дает А = 8,6970,008, или при записи верными цифрами, А=8,70,01.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №1**

**Задание 1.**

Вычислите с помощью МК значение величины Z при заданны значениях параметров *a, b* и *c*, использую «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

1. по правилам подсчета цифр;
2. с систематическим учетом границ абсолютных погрешностей;
3. по способу границ.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

В результате выполнения практической работы необходимо сделать обоснованный вывод о целесообразности и эффективности использования тех или иных методов и средств вычислений.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Номер варианта** | **Z** | **a** | **b** | **c** |
| **1** |  | 3,4 | 6,22 | 0,149 |
| **2** |  | 4,05 | 6,723 | 0,03254 |
| **3** |  | 0,7219 | 135,347 | 0,013 |
| **4** |  | 3,672 | 4,63 | 0,0278 |
| **5** |  | 1,24734 | 0,346 | 0,051 |
| **6** |  | 11,7 | 0,0937 | 5,081 |
| **7** |  | 1,75 | 1,21 | 0,041 |
| **8** |  | 18,0354 | 3,7251 | 0,071 |
| **9** |  | 0,113 | 0,1056 | 89,4 |
| **10** |  | 0,0399 | 4,83 | 0,072 |
| **11** |  | 1,574 | 1,40 | 1,1236 |
| **12** |  | 12,72 | 0,34 | 0,0290 |
| **13** |  | 3,49 | 0,845 | 0,0037 |
| **14** |  | 0,0976 | 2,371 | 1,15874 |
| **15** |  | 0,11587 | 4,25 | 3,00971 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по правилам подсчета цифр с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?
9. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу границ с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?

Практическая работа № 2

**РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ И МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений; закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления, метод итераций).

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:** Программа MS Office Excel.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

Число  называется корнем уравнения*, если .*

Если функция определена и непрерывна на  и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на  существует хотя бы один корень.

При определении приближенных значений корней уравнения необходимо решить две задачи:

1. *Отделить корень уравнения* — значит найти такой интервал, внутри которого находится один и только один корень данного уравнения.
2. *Уточнить корень* с наперед заданным числом верных знаков.

Методы уточнения корней

*Метод половинного деления*

В основе метода лежит деление отрезка пополам, на котором определен корень уравнения. Итерационная формула имеет вид: 

Где

x – искомый корень уравнения

k – индекс приближенного значения корня

a и b – отрезок [a ; b] на котором определен корень уравнения.

Отрезок [a ; b] делится затем на два отрезка: [a ; x(k)] и [x(k) ; b], из которых выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков.

Процесс деления продолжается до тех пор, пока длина последнего отрезка не станет |a–b| ≤ 2ε , где ε – точность приближений.

*Метод простой итерации.*

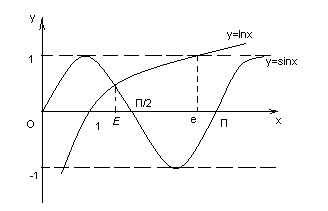
Исходное уравнение f(x)=0 должно быть преобразовано к виду: x=φ(x)

Итерационная формула имеет вид: 

Выполнение итераций повторяют пока не будет выполнено |x(k) – x(k-1)| ≤ ε

**Пример 1.** Графически отделить корни уравнения **.**

Для графического отделения корней уравнения ****преобразуем его к равносильному уравнению **** и отдельно построим графики функций ****.



Из графика вполне очевидно, что уравнение имеет единственный корень ξ и этот корень находится на отрезке [1;1,5].

Вычислим для проверки значения функции на концах отрезка [1;1,5]: f(1)=0.909298; f(1,5)= -0,264344. Как видно, корень на отрезке [1;1,5] действительно имеется.

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом.

Так, в нашем примере, имеем f(1,3)=0,253138>0, так что отрезком, на котором находится корень, можно считать [1,3;1,5].

**Пример 2.** Найти корень уравнения **** на отрезке [1,3;1,5] с точностью до 10-3 методом половинного деления.

*Решение:* Уравнение  имеет единственный корень на отрезке [1,3;1,5]

Уточним корень уравнения:Найдем середину отрезка [1,3;1,5]: .

Определим, на каком из полученных отрезков [1,3;1,4] и [1,4;1,5] функция меняет свой знак.

1) [1,3;1,4]:  2) [1,4;1,5]: 

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,3;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10-3:

, точность не достигнута.

Разделим отрезок [1,3;1,4] пополам точкой .

Определим, на каком из полученных отрезков [1,3;1,35] и [1,35;1,4] функция меняет свой знак.

1) [1,3;1,35]: 2) [1,35;1,4]: 

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,35;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10-3:

, точность не достигнута.

Снова разделим отрезок [1,35;1,4] пополам точкой .

Определим, на каком из полученных отрезков [1,35;1,375] и [1,375;1,4] функция меняет свой знак.

1) [1,35;1,375]: 

2) [1,375;1,4]: 

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,375;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10-3:

, точность не достигнута.

Продолжая делить отрезок пополам и проверять знаки функции на новых промежутках, до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность решения, получим:

Решение уравнения с точностью 10-3: х=1,399.

**Пример 3.** Найти корень уравнения ** методом простых итераций с точностью **.

Решение.

Корень уравнения **. Преобразуем уравнение к виду . Для этого запишем его сначала в форме **. Функция  не удовлетворяет условию сходимости, так как , , . Поэтому воспользуемся другим преобразованием.

В результате получим **. Можно проверить, что  на отрезке **, то есть достаточное условие сходимости выполняется.

Зададим начальное приближение . Выполним расчеты по формуле (1): **, **

Результаты расчетов приведены в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | -1 | - |
| 1 | -1,2599 | 0,2599 |
| 2 | -1,3123 | 0,0524 |
| 3 | -1,3223 | 0,0100 |

Таким образом, **.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №2**

**Задание 1**. Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом. По методу половинного деления вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10-3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Номер варианта** | **Уравнение** | **Пояснения** |
| **1** |  | - |
| **2** |  | - |
| **3** |  | При х<10 |
| **4** |  | При х>-10 |
| **5** |  | При х<5 |
| **6** |  | - |
| **7** |  | - |
| **8** |  | - |
| **9** |  | - |
| **10** |  | - |
| **11** |  | - |
| **12** |  | - |
| **13** |  | - |
| **14** |  | - |
| **15** |  | - |

**Задание 2*.*** Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом и уточнить их методом итераций до 0,001.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Задание | Вариант | Задание |
| 1 | *-0,5x = cos2x* | 6 | *x = 2sin 2x* |
| 2 | *–x/3 = sin 3x* | 7 | *-x = 5sin3x* |
| 3 | *-0,3x = cos x* | 8 | *cos 3x = 2x* |
| 4 | *0,4x = cos(0,5x)* | 9 | *4sin(1,5x)-2,8x=0* |
| 5 | *-x = 4cos x* | 10 | *cos(2,5x)-4x=0* |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что означает «решить уравнение аналитически» и «решить уравнение численно»?
2. В чем заключается задача отделения корней?
3. В чем состоит основная идея метода половинного деления?
4. Может ли метод половинного деления дать точное значение корня уравнения?
5. В чем состоит основная идея метода простых итераций?

Практическая работа № 3

**РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений; закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод хорд и касательных).

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:** Программа MS Office Excel.

.**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Пусть имеется уравнение вида *f(x)=0* , где *f(x)* - алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Наряду с методом половинного деления существуют и другие, более сложные и более эффективные итерационные методы. Прежде всего, к ним относится группа методов, которые связаны с именем Ньютона. Рассмотрим два из них – *метод касательных и метод хорд.*

Оба метода основаны на следующем приеме.

Пусть уравнение *f(x)=0* имеет единственный корень на отрезке [a;b]. Преобразуем его к равносильному уравнению

 **(1)**

где - любая функция, определенная на отрезке [a;b] и не обращающаяся на нем в нуль. Осуществляя различными способами выбор , можно получить, в частности, и указанные методы.

1. ***Метод касательных***

Пусть в (1) . Таким образом, итерационная последовательность строится с помощью рекуррентного соотношения

 **(2)**

Функция *f(x)* удовлетворяет следующим условиям:

1) Является дважды дифференцируемой на отрезке [a;b];

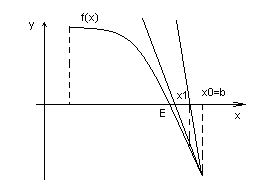
2) Обе производные – первая и вторая – не меняют знак на этом отрезке, т.е. функция *F(x)* монотонна и не меняет характер выпуклости.

В таком ситуации *за х0 берется тот конец отрезка [a;b], на котором функция f(x) и ее вторая производная имеют одинаковые знаки, т.е. выполняется условие .*

На каждом шаге построения итерационной последовательности буде проверять точность достижения корня с помощью неравенства:

. **(3)**

Рассмотренный метод называется *методом касательных* потому, что если обратиться к графической иллюстрации , то точка *х1*, определяемая по формуле (2) при *n*=0, есть точка пересечения касательной, проведенной к графику *y=f(x)* в точке с абсциссой , определяемой предыдущим членом последовательности, с осью абсцисс.

****

Каждому следующему члену итерационной последовательности (2) соответствует точка пересечения касательной, проведенной к графику *y=f(x)* в точке с абсциссой *х0*, с осью абсцисс.

**Пример:** Уточнить корень уравнения **** на отрезке [1,3;1,5] методом касательных с точностью до 1..

*Решение:* Формула (2) в нашем примере имеет вид

,

т.к . производная .

Для определения точки  найдем знаки ****и на концах отрезка [1,3;1,5]:

f (1, 3) = 0, 515501 - 0, 262363 = 0, 253137>0,

f (1, 5) = 0, 14112 - 0,405465 = - 0, 26435<0,

f” (1, 3) = -2,062 + 0,591716 = -1, 4703<0,

f” (1, 5) = -0, 56448 + 0, 4444 = - 0, 12<0.

Таким образом, .

Вычислим несколько членов итерационной последовательности «ручным» способом:



Сделаем проверку (3) точности достижения корня:

 , значит 

- требуемая точность не достигнута.



Снова проверка:

- требуемая точность достигнута.

Корень уравнения х1= 1, 399429 .

1. ***Метод хорд***

Реализуя метод касательных, при каждой итерации необходимо вычислить значение не только функции f(x), но и ее производной f’(х). Однако есть вариант метода Ньютона, в котором можно ограничиться вычислением только значений f(x), что иногда упрощает вычислительный алгоритм.

Если положить в (1) , а в качестве *с* взять тот конец промежутка [a;b], на котором , то приходим к итерационному методу:

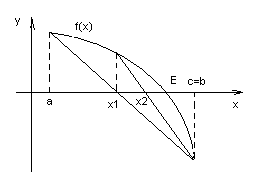
, **(4)**

называемому *методом хорд* (или *методом секущих*).

В качестве х0 в этом случае следует принять тот конец промежутка [a;b], который остался после выбора *с* (т.е. если *c=a,* то *x0=b* или наоборот). Далее последовательность строится по формуле (4).

Оценка степени приближения к корню возможна с помощью неравенства (3).

На рисунке проиллюстрирован геометрический смысл метода.

****

В данном случае *c=b, x0=a*, х1 соответствует точке пересечения хорды, соединяющей концы кривой, с осью абсцисс. Далее находится точка на кривой с абсциссой х1, проводится следующая хорда и т.д.

**Пример:** Уточнить корень уравнения **** на отрезке [1,3;1,5] методом хорд с точностью до 1..

*Решение:* Точка *с* выбирается так же, как и точка х0 в предыдущем примере, т.е. *с*=1,5. Будем приближать точку х0= *а* = 1, 3.



Проверим, достигнута ли заданная точность.

- требуемая точность не достигнута.

Найдём следующее приближение:



Проверим точность:

- требуемая точность достигнута

Итак, корень уравнения х=1, 39941.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №3**

**Задание 1**. Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.

**Задание 2**. По методу хорд вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10-3.

**Задание 3**. По методу касательных вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10-3.

Сопоставьте и прокомментируйте полученные результаты.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Номер варианта** | **Уравнение** | **Пояснения** |
| **1** |  | - |
| **2** |  | - |
| **3** |  | При х<10 |
| **4** |  | При х>-10 |
| **5** |  | При х<5 |
| **6** |  | - |
| **7** |  | - |
| **8** |  | - |
| **9** |  | - |
| **10** |  | - |
| **11** |  | - |
| **12** |  | - |
| **13** |  | - |
| **14** |  | - |
| **15** |  | - |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Дайте общее описание метода касательных?
2. Дайте общее описание метода хорд?
3. Нарисуйте геометрические схемы методов касательных и хорд.
4. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для каждого метода.
5. Как проверяется требуемая точность в методах?

Практическая работа № 4

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

1. ***Метод Гаусса решения систем уравнений***

Множество прикладных и чисто математических задач приводят к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (С.Л.А.У). Без преувеличения можно утверждать, что это одна из важнейших задач вычислительной математики.

Значимость задачи породила целый ряд методов ее решения. Среди этих методов есть универсальные и специализированные (т.е. применимые лишь к системам, имеющим некоторые специальные свойства). Методы отличаются друг от друга эффективностью, требованиями к объемам машинной памяти (при реализации на ЭВМ), закономерностями накопления ошибок в ходе расчетов. Не существует одного метода, который можно было бы во всех случаях предпочесть всем остальным, и поэтому знакомство с некоторыми методами является обязательным для квалифицированного вычислителя.

Итак, перед нами система *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными:  **(1)**

Запись ее в такой форме достаточно громоздка. Будем использовать матричную форму записи, совершенно равносильную (1): **AХ=B,**

где 

Под названием «метод Гаусса» фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Наиболее популярным является метод, основанный на так называемой схеме *единственного деления*; этот метод имеет также и ряд модификаций.

Сам по себе метод Гаусса относится к точным методам. Это означает, что если точно выполнять все требуемые действия, получено точное решение, поскольку погрешность метода в данном случае равна нулю.

Будем считать матрицу системы (1) невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю.

Рассмотрим алгоритм, который получил название схемы единственного деления.

Подвергнем систему (1) следующим преобразованиям.

Считая, что (ведущий элемент), разделим на  коэффициенты первого уравнения:  **(2)**

Используя уравнение (2), легко исключить неизвестное x из остальных уравнений системы (достаточно из каждого уравнения вычесть уравнение (1), умноженное на соответствующий коэффициент при x).

Над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное .

Повторяя этот процесс, получим систему с треугольной матрицей:

 **(3)**

Из системы (3) последовательно находим значения неизвестных 

Отметим, что последовательное исключение неизвестных называется *прямым ходом метода Гаусса*. Нахождение значений неизвестных – *обратным ходом*.

**Пример:** Решить систему линейных уравнений:



*Решение:* Запишем расширенную матрицу системы:



Так как, , разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

.

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

.

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

.

Получаем треугольную матрицу. Решая ее, начиная с последней строки, найдем значения неизвестных:

,



Так как в процессе решения выполнялись округления, то решение содержит вычислительную ошибку.

**Определение**: Значение разностей между свободных элементов исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных называется *невязками*.

В рассмотренном примере невязки имеют следующие значения:



Следует заметить, что по величине невязок нельзя судить о погрешностях результатов, но можно уточнить решение системы, вычислив поправки для найденных значений неизвестных.

***2. Вычисление определителей матриц***

Рассмотрим алгоритм вычисления определителя в связи с решением с.л.а.у. методом Гаусса по схеме единственного деления.

Обозначим определитель системы через D.

Что происходит с ним на каждом шаге реализации метода Гаусса?

1) ;

2);

………………

*n*).

Матрица коэффициентов при неизвестных системы, полученная в результате - треугольная, с единицами по главной диагонали. Поэтому её определитель равен 1.

***3. Применение метода Гаусса для вычисления обратной матрицы***

Схема единственного деления может использоваться также и для вычисления элементов матрицы , обратной для невырожденной матрицы A. По определению, ,где E – единичная матрица.

Представим искомую матрицу и единичную матрицу Е в виде совокупности векторов-столбцов. В такой записи соотношение  предстанет в виде совокупности из *n*  систем линейных уравнений вида .

Решение каждой системы дает соответствующий столбец обратной матрицы.

Расширив таблицу схемы единственного деления, можно проиллюстрировать получение обратной матрицы рассмотренным методом.

**Пример:** Дана матрица



Найти обратную матрицу, пользуясь схемой единственного деления.

*Решение:*

Запишем данную и единичную матрицы в одну, и применим, к ним одновременно, элементарные преобразования схемы единственного деления:



Так как, , разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

.

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

.

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

.

Из элементов второй строки вычтем элементы третьей, умноженные на 2,0401.

.

Из элементов первой строки вычтем элементы третьей, умноженные на (-4,9615).

.

Из элементов первой строки вычтем элементы второй, умноженные на (-1,7991).

.

Матрица, полученная справа и является искомой обратной матрицей:

.

Сделаем прямую проверку:

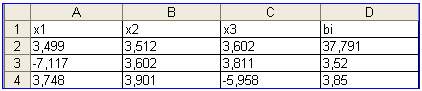


Поскольку вычисления матрицы велись с округлением, то наличие невязок, отражённых в матрице , является естественным.

***4. Решение системы уравнений методом Гаусса - MS Office Excel***

Для того чтобы решить данную систему уравнений в Excel, нужно выполнить следующие действия:

1. Заполнить ячейки следующим образом (обратить внимание на названия и номера столбцов при заполнении - они должны быть такими же, как на рисунке):



1. В ячейку E1 ввести текст Контрольные суммы, а в F1 – Строчные суммы.
2. В ячейку E2 ввести формулу =СУММ(A2:D2) (для подсчета контрольных сумм) и методом протягивания заполнить ячейки E3, E4.
3. После этого необходимо выполнить "Прямой ход" - преобразование исходной системы к системе с треугольной матрицей, на главной диагонали которой стоят единицы. Для этого нужно выполнить следующие действия:

* Чтобы коэффициент при x1 равнялся 1, нужно в ячейку A5 ввести формулу =A2/$A$2, затем методом протягивания скопировать ее в ячейки B5:D5.
* Над столбцом контрольных сумм необходимо выполнить те же действия, что и над коэффициентами при неизвестных, следовательно в ячейку E5 нужно ввести формулу =E2/$A$2.
* В ячейку F6 ввести формулу =СУММ(A5:D5) (для подсчета строчных сумм).
* В ячейку A6 ввести формулу =A3-$A$3\*A5 (для обнуления коэффициента при x1 во втором уравнении системы), заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек B6:E6.
* В ячейку A7 ввести формулу =A4-A5\*$A$4 (для обнуления коэффициента при x1 в третьем уравнении системы), заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек B7:E7.
* В ячейку B8 ввести формулу =B6/$B$6, заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек C8:E8.
* В ячейку B9 ввести формулу =B7-B8\*$B$7, заполнить этой формулой методом протягивания диапазон ячеек C9:E9.
* В ячейку C10 ввести формулу =C9/$C$9, скопировать эту формулу в диапазон ячеек D10:E10.
* Формулой из ячейки F5 методом протягивания заполнить ячейки F6:F10 (следует обратить внимание на то, что значения в столбцах строчных и контрольных сумм попарно равны).

1. После этого необходимо выполнить "Обратный ход" - последовательное нахождение значений x3, x2, x1. Для этого нужно выполнить следующие действия:

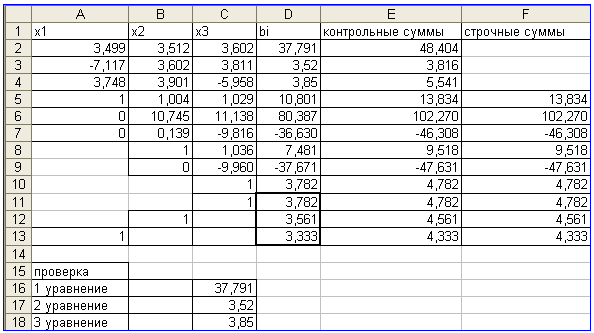
* В ячейки C11, B12, A13 ввести единицы.
* В ячейку D11 ввести формулу =D10 и скопировать ее в ячейку E11.
* В ячейку F11 ввести формулу =A11+B11+C11+D11.
* В ячейку D12 ввести формулу =D8-C8\*D11.
* В ячейку E12 ввести формулу =E8-C8\*E11.
* В ячейку D13 ввести формулу =D5-C5\*D11-B5\*D12.
* В ячейку E13 ввести формулу =E5-C5\*E11-B5\*E12.
* Формулу из ячейки F11 скопировать диапазон ячеек F12:F13.

1. Таким образом, получены x3, x2, x1. Для проверки правильности решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

* Диапазон ячеек A15:A18 последовательно заполнить следующими словами: проверка, 1 уравнение, 2 уравнение, 3 уравнение.
* В ячейку C16 ввести формулу =A2\*$D$13+B2\*$D$12+C2\*$D$11, затем скопировать ее в диапазон ячеек C17:C18.

1. Нужно обратить внимание, что полученный результат в ячейках C17:C18 полностью совпадает с ячейками D2:D4, следовательно, задача решена верно.

Таким образом, получаем следующее:



Ответ: x1=3.333, x2 =3.561, x3 =3.782.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №4**

**Задание 1**

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:



Решить систему методом Гаусса:

а) используя «ручную» схему единственного деления:

* расчеты выполняйте с тремя знаками после запятой (с применением калькулятора);
* подставьте найденные решения в исходную систему, вычислите невязки и сравните полученные решения;
* выбрав ведущие элементы схемы единственного деления, найдите значения определителя системы;
* для матрицы системы, по схеме единственного деления, найдите обратную матрицу.

б) с помощью программы для ЭВМ с пооперационным учетом ошибок.

**Задание 2**

Решите систему, используя одно из инструментальных средств (MS Excel). Сопоставьте найденное решение с решениями, полученными при выполнении задания 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Номер варианта** | ***i*** | ***ai1*** | ***ai2*** | ***ai3*** | ***bi*** |
| **1** | 1  2  3 | 0,21  0,30  0,60 | -0,45  0,25  -0,35 | -0,20  0,43  -0,25 | 1,91  0,32  1,83 |
| **2** | 1  2  3 | -3  0,5  0,5 | 0,5  -6,0  0,5 | 0,5  0,5  -3 | -56,5  -100  -210 |
| **3** | 1  2  3 | 0,45  -0,01  -0,35 | -0,94  0,34  0,05 | -0,15  0,06  0,63 | -0,15  0,31  0,37 |
| **4** | 1  2  3 | 0,63  0,15  0,03 | 0,05  0,10  0,34 | 0,15  0,71  0,10 | 0,34  0,42  0,32 |
| **5** | 1  2  3 | -0,20  -0,30  1,20 | 1,60  0,10  -0,20 | -0,10  -1,50  0,30 | 0,30  0,40  -0,60 |
| **6** | 1  2  3 | 0,30  -0,10  0,05 | 1,20  -0,20  0,34 | -0,20  1,60  0,10 | -0,60  0,30  0,32 |
| **7** | 1  2  3 | 0,20  0,58  0,05 | 0,44  -0,29  0,34 | 0,81  0,05  0,10 | 0,74  0,02  0,32 |
| **8** | 1  2  3 | 6,36  7,42  5,77 | 11,75  19,03  7,48 | 10  11,75  6,36 | -41,40  -49,49  -27,67 |
| **9** | 1  2  3 | -9,11  7,61  -4,64 | 1,02  6,25  1,13 | -0,73  -2,32  -8,88 | -1,25  2,33  -3,75 |
| **10** | 1  2  3 | -9,11  7,61  -4,64 | -1,06  6,35  1,23 | -0,67  -2,42  -8,88 | -1,56  2,33  -3,57 |
| **11** | 1  2  3 | 1,02  6,25  1,13 | -0,73  -2,32  -8,88 | -9,11  7,62  4,64 | -1,25  2,33  -3,75 |
| **12** | 1  2  3 | 0,06  0,99  1,01 | 0,92  0,01  0,02 | 0,03  0,07  0,99 | -0,82  0,66  -0,98 |
| **13** | 1  2  3 | 0,10  0,04  0,91 | -0,07  -0,99  1,04 | -0,96  -0,85  0,19 | -2,04  -3,73  -1,67 |
| **14** | 1  2  3 | 0,62  0,03  0,97 | 0,81  -1,11  0,02 | 0,77  -1,08  -1,08 | -8,18  0,08  0,06 |
| **15** | 1  2  3 | 0,63  0,90  0,13 | -0,37  0,99  -0,95 | 1,76  0,05  0,69 | -9,29  0,12  0,69 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какие методы решения с.л.а.у. вы знаете?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. На чем основываются подходы к организации контроля вычислений в прямом ходе, обратном ходе?
4. На чем основываются алгоритмы вычисления определителя по методу Гаусса?
5. Каким образом схема единственного деления может использоваться для вычисления обратной матрицы?

Практическая работа № 5

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ И МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ.**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения решать системы линейных уравнений приближенными методами(метод простой итерации, метод Зейделя).

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

***1. Метод простой итерации***

Как отмечалось ранее, итерационные методы используются для решения уравнений и систем любой природы. Рассмотрим, как это делается применительно к системам линейных алгебраических уравнений.

Приведём систему линейных алгебраических уравнений

 (1)

к равносильной ей системе вида **x=Ax**:

 (2)

В сокращенной форме: .

О системе (1) говорят, что она «приведена к нормальному виду».

Правая часть системы определяет отображение  (3),

переводящее точку  в точку . Используя отображения (1) и выбрав начальную точку можно построить итерационную последовательность точек.

Если отображение *F* является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы (2) а, следовательно, и решением исходной системы.

**Замечание:** Отображение является *сжимающим*, если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (1) необходимым и достаточным условием сжимаемости является следующее:

, (4)

**(**т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (1), взятых по столбцам, должен быть меньше 1.

*Практическая схема решения с.л.у. методом простой итерации*

С.л.у. необходимо привести к нормальному виду.

Для обеспечения сходимости итерационной последовательности необходимо, чтобы коэффициенты  при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (1), у которой все .

**Пример:** Решить систему линейных уравнений



методом простой итерации с точностью .

*Решение:*

Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 2-го уравнений:



Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и, выразим из каждого уравнения диагональные элементы:



Проверку условия сходимости точности решения осуществим с помощью программы.

***2. Метод Зейделя***

Будем снова рассматривать систему линейных уравнений (1) и эквивалентную ей систему (2).

При решении системы (2) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению.

Обозначим элементы имеющегося приближения через , а элементы очередного (вычисляемого) приближения через  .

Вычислительные формулы имеют вид:



*Основная идея метода Зейделя* состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения  учитываются уже полученные значения. Выпишем соответствующие вычислительные формулы:



Справедливо следующее **утверждение***:*

*Если для матрицы коэффициентов системы (2) выполняется условие (4), то итерационный процесс метода Зейделя сходится к решению системы при любом выборе начального приближения .*

Преимущество этого метода состоит в том, что он обеспечивает более быструю схожесть, чем метод простой итерации.

**Пример:**

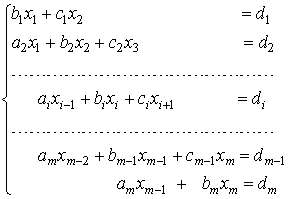
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 1 | 0,401 | 0,301 | 0,000 | 0,000 | 0,122 |
| -0,029 | -0,500 | -0,018 | 0,000 | -0,253 |
| 0,000 | -0,050 | -1,400 | -0,039 | -0,988 |
| 0,000 | 0,000 | -0,007 | -2,300 | -2,082 |

**Решение:**

**Метод прогонки**

1. **Решим систему линейных уравнений методом прогонки.**

Он является модификацией метода Гаусса для частного случая системы уравнений с трехдиагональной матрицей, которые имеют следующий вид:



****

Заданная система имеет трехдиагональную матрицу четвертого порядка и ее можно решать методом прогонки.

Из вида систему следует, что . Следовательно система имеет единственное решение и для ее решения можно применить метод прогонки.

*Прямой ход прогонки*.

Вычислим прогоночные коэффициенты:

1. Вычислим знаменатель

,

,



1. 





1. ,

,



1. ,

,



*Обратный ход прогонки.*

Находим значения неизвестных:









**Ответ:** 

**Итерационный метод**

**Метод Гаусса-Зейделя**

1. **Решим систему методом Гаусса-Зейделя**

****

Запишем исходную систему в виде:





В качестве начальных приближений возьмем нули, т.е. примем

x2(0) = x3(0)= x4(0)= 0.

Найдем значения неизвестных на первой итерации:





Далее произведем вторую итерацию:





Проверим точность:



Точность не достигнута.

Произведем третью итерацию:





Проверим точность:



Точность не достигнута.

Произведем четвертую итерацию:





Проверим точность:



Точность достигнута.

Решение системы с точностью 0,001:



**Сравнение результатов**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Метод | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 |
| Гаусса-Зейделя | -0,060 | 0,486 | 0,663 | 0,903 |
| Прогонки | -0,060 | 0,486 | 0,663 | 0,907 |

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №5**

1. Решить систему линейных уравнений, коэффициенты которой приведены в таблице заданий методами прогонки, итерационным методом. Предварительно привести систему к треугольному виду.
2. Решить систему на ЭВМ с помощью этих методов систему уравнений сравнить результаты.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 1 | -1,700 | 0,003 | 0,000 | 0,000 | 0,681 |
| 0,002 | 0,800 | 0,001 | 0,000 | 0,480 |
| 0,000 | -0,002 | -0,100 | 0,030 | -0,802 |
| 0,000 | 0,000 | -0,003 | -1,600 | -1,007 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 2 | -3,000 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 1,514 |
| -0,011 | 2,100 | 0,520 | 0,000 | 1,478 |
| 0,000 | 0,005 | 1,200 | 0,600 | 1,083 |
| 0,000 | 0,000 | -0,010 | -0,300 | -1,007 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 3 | 4,300 | 0,217 | 0,000 | 0,000 | 2,663 |
| 0,100 | -3,400 | -0,207 | 0,000 | 2,778 |
| 0,000 | 0,090 | 2,500 | 0,197 | 2,533 |
| 0,000 | 0,000 | 0,080 | -1,600 | 1,928 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 4 | -5,600 | 0,268 | 0,000 | 0,000 | 4,032 |
| 0,147 | 4,700 | 0,271 | 0,000 | 4,313 |
| 0,000 | -0,150 | -3,800 | 0,274 | 4,235 |
| 0,000 | 0,000 | 0,153 | 2,900 | 3,797 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 5 | -8,200 | 0,370 | 0,000 | 0,000 | 7,559 |
| 0,234 | 7,300 | 5,600 | 0,000 | 8,175 |
| 0,000 | 0,260 | -0,340 | 0,422 | 8,421 |
| 0,000 | 0,000 | 0,268 | 5,500 | 8,322 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 6 | 9,500 | 0,422 | 0,000 | 0,000 | 9,719 |
| 0,278 | 8,601 | 0,459 | 0,000 | 10,500 |
| 0,000 | 0,315 | 7,700 | 0,496 | 10,915 |
| 0,000 | 0,000 | 0,351 | 6,803 | 10,978 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 7 | 10,800 | -0,576 | 0,000 | 0,000 | 12,143 |
| 0,321 | 9,900 | 7,300 | 0,000 | 13,089 |
| 0,000 | 0,369 | 9,000 | -6,060 | 13,674 |
| 0,000 | 0,000 | 0,416 | 8,100 | 13,897 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 8 | -1,100 | 0,528 | 0,000 | 0,000 | 14,830 |
| 0,365 | 0,113 | 0,536 | 0,000 | 15,941 |
| 0,000 | -0,423 | 1,031 | 0,534 | 16,969 |
| 0,000 | 0,000 | 0,481 | -0,570 | 17,081 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 9 | 13,400 | 0,581 | 0,000 | 0,000 | 17,782 |
| -0,408 | 12,500 | -0,650 | 0,000 | 19,593 |
| 0,000 | 0,477 | -11,600 | 0,781 | 19,974 |
| 0,000 | 0,000 | 0,546 | 10,700 | 20,528 |
|  |  | | | |  |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 10 | 30,300 | 0,153 | 0,000 | 0,000 | 80,168 |
| 0,975 | -29,400 | 0,011 | 0,000 | 83,578 |
| 0,000 | 0,117 | -2,500 | 1,660 | 86,609 |
| 0,000 | 0,000 | 10,700 | 27,600 | 89,278 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 11 | 0,161 | 0,332 | 0,000 | 0,000 | 86,814 |
| 0,109 | -0,301 | -0,150 | 0,000 | 90,358 |
| 0,000 | -0,060 | 0,171 | 0,051 | 19,861 |
| 0,000 | 0,000 | 0,145 | -0,298 | 93,502 |
|  | Матрица системы | | | | Правая часть |
| 12 | 13,400 | 0,581 | 0,000 | 0,000 | 17,782 |
| -0,408 | 12,500 | -0,650 | 0,000 | 19,593 |
| 0,000 | 0,477 | -11,600 | 0,781 | 19,974 |
| 0,000 | 0,000 | 0,546 | 10,700 | 20,528 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Каким образом система линейных уравнений преобразуется к итерационному виду?
2. Как сформулировать условие сходимости итерационного процесса
3. Как привести исходную систему линейных уравнений к системе с преобладающими диагональными элементами?
4. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом простой итерации.
5. В чем состоит отличие метода Зейделя от аналогичного процесса простой итерации?
6. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом Зейделя.

Практическая работа № 6

**СОСТАВЛЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ЛАГРАНЖА, НЬЮТОНА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** Закрепить навыки составления интерполяционных многочленов Лагранжа, построения кубического сплайна.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значениям функции f(x) в некоторых точках отрезка восстановить ее значения в остальных точках отрезка.

Существует несколько подходов к решению задач интерполяции.

1. Метод Лагранжа. Основная идея этого метода состоит в том, чтобы, прежде всего, найти многочлен, который принимает значение 1 в одной узловой точке и 0 во всех других. Легко видеть, что функция



является требуемым многочленом степени n; он равен 1, если x=xj и 0, когда x=xi, i≠j. Многочлен Lj(x)⋅yj принимает значения yi в i-й узловой точке и равен 0 во всех других

узлах. Из этого следует, что есть многочлен степени n, проходящий через n+1 точку (xi, yi).

2. Метод Ньютона (метод разделённых разностей). Этот метод позволяет получить аппроксимирующие значения функции без построения в явном виде аппроксимирующего полинома. В результате получаем формулу для полинома Pn, аппроксимирующую функцию f(x):

P(x)=P(x0)+(x-x0)P(x0,x1)+(x-x0)(x-x1)P(x0,x1,x2)+…+(x-x0)(x-x1)…(x-xn)P(x0,x1,…,xn);

1.  — разделённая разность 1-го порядка;

 — разделённая разность 2-го порядка и т.д.

Значения Pn(x) в узлах совпадают со значениями f(x)

**Пример:** Построить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблицей значений:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 3 | 4 |
| F(x) | 12 | 4 | 6 |

*Решение:*

Из таблицы следует, что n=2 (на 1 меньше, чем узлов).

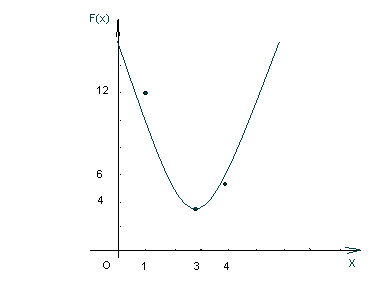


По формуле (3.9) получаем:



Таким образом, интерполяционный многочлен для заданной функции имеет вид 

Построим график и точки в одной координатной плоскости.

******

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №6**

**Задание 1.** По заданной таблице значений функции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | *х0* | *х1* | *х2* | *х3* |
| *у* | *у0* | *у1* | *у2* | *у3* |

составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график и отметить на нем узловые точки.

**Задание 2.** Вычислить с помощью калькулятора одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оценить погрешность интерполяции.

**Задание 3.** Составить программу вычисления значения функции в точке, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.

**Задание 4.** Сравнить результаты заданий 2 и 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***х0*** | ***х1*** | ***х2*** | ***х3*** | ***у0*** | ***у1*** | ***у2*** | ***у3*** | ***х*** |
| **1** | -1 | 0 | 3 | 4 | -3 | 5 | 2 | -6 | 3,8 |
| **2** | 2 | 3 | 5 | 6 | 4 | 1 | 7 | 2 | 3,5 |
| **3** | 0 | 2 | 3 | 5 | -1 | -4 | 2 | -8 | 0,5 |
| **4** | 7 | 9 | 13 | 15 | 2 | -2 | 3 | -4 | 4,8 |
| **5** | -3 | -1 | 3 | 5 | 7 | -1 | 4 | -6 | 4,1 |
| **6** | 1 | 2 | 4 | 7 | -3 | -7 | 2 | 8 | 3,9 |
| **7** | -1 | -1 | 2 | 4 | 4 | 9 | 1 | 6 | 3,3 |
| **8** | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | -3 | 6 | -2 | 4,0 |
| **9** | -4 | -2 | 0 | 3 | 2 | 8 | 5 | 10 | 2,9 |
| **10** | -1 | 1,5 | 3 | 5 | 4 | -7 | 1 | -8 | 5,3 |
| **11** | 2 | 4 | 7 | 8 | -1 | -6 | 3 | 12 | 4,1 |
| **12** | -9 | -7 | -4 | -1 | 3 | -3 | 4 | -9 | 7,6 |
| **13** | 0 | 1 | 4 | 6 | 7 | -1 | 8 | 2 | 4,4 |
| **14** | -8 | -5 | 0 | 2 | 9 | -2 | 4 | 6 | 2,5 |
| **15** | -7 | -5 | -4 | -1 | 4 | -4 | 5 | 10 | 5,2 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. В каких случаях может потребоваться аппроксимация функции?
2. Какими критериями пользуются для определения «близости» функции?
3. На чем основывается доказательство существования и единственности интерполяционного многочлена для таблично заданной функции?
4. В какой форме строится интерполяционный многочлен Лагранжа?

Практическая работа № 7

**ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНАМИ**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** закрепить умения интерполировать функцию сплайнами и находить ее значение в заданной точке. Овладение вычислительными методами и практическими методами оценки погрешности вычислений. Приобретение умений и навыков при программировании и отладке вычислительных задач на компьютере

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значениям функции f(x) в некоторых точках отрезка восстановить ее значения в остальных точках отрезка.

*Сплайн-аппроксимация*. Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на отрезке [a, b], а на каждом частном интервале этого отрезка [xi, xi+1] в отдельности являются некоторым многочленом невысокой степени. Обычно применяют кубический сплайн, то есть на каждом локальном интервале функция приближается к полиному 3-го порядка.

Кубический сплайн на отрезке [xi, xi+1] имеет вид:



**Пример:** Построить кубический сплайн для функции y=f(x), заданной таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 1/2 | 1 | 2 | 4 |

с дополнительным условием: . Найти с помощью S(x) значения функции при x=0,3. (Заметим, что в основу таблицы положена функция у =2x).

**Решение:** (т.к. не используется в функциях) и  (т.к. из условия (3.24):).

Шаг таблицы .









 ,

,

.

,

,

.

,

 .

,

, 

Следовательно, сплайн S(x) построен:



Найдем его значение при x=0,3:

Заметим, что 0,3[0;1], поэтому используем многочлен :

.

Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера:.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №7**

**Задание 1.** По заданной таблице значений функции

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | *х0* | *х1* | *х2* | *х3* |
| *у* | *у0* | *у1* | *у2* | *у3* |

вычислить коэффициенты и составить формулы кубического сплайна.

**Задание 2.** Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках.

**Задание 3.** Составить программу вычисления значения функции в точке, используя интерполяцию сплайнами.

**Задание 4.** Сравнить результаты заданий 1 и 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***х0*** | ***х1*** | ***х2*** | ***х3*** | ***у0*** | ***у1*** | ***у2*** | ***у3*** | ***х*** |
| **1** | -1 | 0 | 1 | 2 | -3 | 5 | 2 | -6 | 3,8 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 1 | 7 | 2 | 3,5 |
| **3** | 0 | 2 | 4 | 6 | -1 | -4 | 2 | -8 | 0,5 |
| **4** | 7 | 9 | 11 | 13 | 2 | -2 | 3 | -4 | 4,8 |
| **5** | -3 | -1 | 1 | 3 | 7 | -1 | 4 | -6 | 4,1 |
| **6** | 1 | 2 | 3 | 4 | -3 | -7 | 2 | 8 | 3,9 |
| **7** | -1 | 1 | 3 | 5 | 4 | 9 | 1 | 6 | 3,3 |
| **8** | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | -3 | 6 | -2 | 4,0 |
| **9** | -4 | -2 | 0 | 2 | 2 | 8 | 5 | 10 | 2,9 |
| **10** | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 | -7 | 1 | -8 | 5,3 |
| **11** | 2 | 4 | 6 | 8 | -1 | -6 | 3 | 12 | 4,1 |
| **12** | -9 | -7 | -5 | -3 | 3 | -3 | 4 | -9 | 7,6 |
| **13** | 0 | 1 | 2 | 3 | 7 | -1 | 8 | 2 | 4,4 |
| **14** | -8 | -7 | -6 | -5 | 9 | -2 | 4 | 6 | 2,5 |
| **15** | -7 | -5 | -3 | -1 | 4 | -4 | 5 | 10 | 5,2 |

## 

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Как ставится задача интерполяции?
2. Какие виды интерполяции вы знаете?
3. В чем суть и геометрический смысл линейной интерполяции?
4. Как выглядит оценка точности при интерполировании многочленом?
5. Что можно сказать об оценке погрешности при решении задачи интерполирования непрерывной функции, если не накладывать на нее никаких дополнительных ограничений?
6. Что такое сплайн-интерполяция и в чем ее суть?
7. Какие трудности возникают при интерполировании сплайнами?

Практическая работа № 8

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ПОМОЩИ ФОРМУЛ НЬЮТОНА-КОТЕСА**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона-Котеса (формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона)).

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Всякая непрерывная на отрезке [a,b] функция f интегрируема на отрезке [a,b], если функция f неотрицательна, то определённый интеграл  численно равен S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямыми x=a и x=b, S=f(x)dx.

Однако не всякая элементарная функция f имеет элементарную первообразную F. Часто на практике сталкиваются с вычислением интегралов от функций, которые заданы табличными и графическими способами, или интегралы от функций, первообразные которых выражаются через элементарные функции очень сложно. В этих случаях прибегают к различным методам приближённого интегрирования.

1. *Формула прямоугольников*

f(x)dx≈((b-a)/n)(y0+y1+…+yn-1) – формула внутренних прямоугольников

f(x)dx≈((b-a)/n)(y1+y2+…+yn) – формула внешних прямоугольников.

 - формула средних прямоугольников.

Погрешность вычисляется по формуле Pnp=, где 

*2. Формула трапеций.*



Для определения погрешности интеграла, вычисленного с помощью формулы трапеций, используется формула: где 

*3.Формула Симпсона (формула парабол).*



Погрешность для этого метода находится по формуле:  где 

**Пример 1.** Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

 (n=5).

*Решение*:

Имеем a=0,  , .

Тогда 

Вычислим значение функции по формуле (4.7):



Применяя формулу прямоугольника с недостатком (4.2) получим



Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона - Лейбница и сравним результаты:



Относительная погрешность вычисления:

.

**Пример**2. По формуле трапеции вычислить интеграл

 (n=5).

*Решение:* Имеем a=0, b=5, , .

Вычислим промежуточные значения функции в узлах:



Тогда по формуле трапеций (4.9) имеем:

.

**Пример 3.** Вычислить интеграл по формуле парабол

, (n=10).

*Решение:* Значения подынтегральной функции в узловых точках запишем в таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
| *xi* |  |
| 0 | 0 |
| 0,1 | 0,0019966 |
| 0,2 | 0,0079467 |
| 0,3 | 0,0531936 |
| 0,4 | 0,0623068 |
| 0,5 | 0,2397124 |
| 0,6 | 0,2032711 |
| 0,7 | 0,6313333 |
| 0,8 | 0,4591078 |
| 0,9 | 1,2689896 |
| 1 | 0,841478 |

Подставим найденные значения в формулу Симпсона, учитывая, что h=0,1:



В данном случае легко вычислить «точное» значение этого интеграла, пользуясь формулой Ньютона - Лейбница

.

Как видим, результат, полученный с помощью приближенной формулы парабол, дает высокую точность.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №8**

**Задание 1.**

Вычислить интеграл от заданной функции *f(x)* на отрезке [*a;b*] при делении отрезка на 10 равных частей тремя способами:

1. по формуле прямоугольников;
2. по формуле трапеций;
3. по формуле Симпсона;

Сравнить точность полученных результатов.

**Задание 2.**

С помощью программ на компьютере вычислить значение интеграла заданной функции на отрезке [*a;b*]:

1. по формуле прямоугольников;
2. по формуле трапеций;
3. по формуле Симпсона.

**Задание 3.**

Вычислить интеграл вручную по формуле Ньютона-Лейбница

Сравнить полученные результаты с результатами, полученными при выполнении задания 1 и 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***f(x)*** | ***a*** | ***b*** |
| **1** |  | 1 | 2 |
| **2** |  | 1 | 2 |
| **3** |  | 2 | 3 |
| **4** |  | 1 | 2 |
| **5** |  | 1.2 | 2.2 |
| **6** |  | 0.5 | 1.5 |
| **7** |  | 2 | 3 |
| **8** |  | 3 | 4 |
| **9** |  | 1 | 2 |
| **10** |  | -1 | 0 |
| **11** |  | -0.5 | 0.5 |
| **12** |  | 0,1 | 1,1 |
| **13** |  | 0.2 | 1.2 |
| **14** |  | 1.5 | 2.5 |
| **15** |  | 0.1 | 1.1 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Почему формула Ньютона-Котеса может оказаться непригодной для реального вычисления определенного интеграла?
2. Как связаны задачи численного интегрирования и интерполирования?
3. Чем объясняется название формулы прямоугольников?
4. Чем объясняется название формулы трапеций?
5. В чем выражается преимущества формулы Симпсона перед формулой трапеций?
6. Каким образом при использовании формулы парабол можно рассчитать требуемое число отрезков разбиения для достижения заданной точности интегрирования ?

Практическая работа № 9

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ ГАУССА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; получить умения приближенно вычислять интегралы при помощи формул Ньютона-Котеса (формула Гаусса).

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Существует подход к построению квадратурных формул, в котором главную роль играет выбор узлов для интерполирования подынтегральной функции, называемый *методом Гаусса*.

При получении квадратных формул Гаусса в исходном интеграле выполняется замена

Формула для вычисления интеграла:



Формула для оценки погрешности примет вид:



**Пример:** Вычислить интеграл  по формуле Гаусса при n = 10.

*Решение*: Имеем a = 0, b = 1, .

Тогда .

Составим таблицу значений, входящих в формулу

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0,02113249 | 0,078868 | 0,00000944  0,00049005 |
| 0,1 | 0,121132249 | 0,178868 | 0,00177304  0,00569215 |
| 0,2 | 0,22113249 | 0,278868 | 0,01072537  0,02140672 |
| 0,3 | 0,32113249 | 0,378868 | 0,03255086  0,05309115 |
| 0,4 | 0,42113249 | 0,478868 | 0,07250071  0,10566206 |
| 0,5 | 0,52113249 | 0,578868 | 0,13520907  0,18331848 |
| 0,6 | 0,62113249 | 0,678868 | 0,22452206  0,28938023 |
| 0,7 | 0,72113249 | 0,778868 | 0,34334373  0,42614496 |
| 0,8 | 0,82113249 | 0,878868 | 0,49350196  0,59476723 |
| 0,9 | 0,92113249 | 0,978868 | 0,67563779  0,795162236 |
| 1,0 |  |  |  |
|  |  |  |  |

Подставляя найденное значение суммы значений функции yi , в формулу получим:

.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №9**

**Задание 1.**

Вычислить интеграл по формуле Гаусса от заданной функции *f(x)* на отрезке [*a;b*] при делении отрезка на 10 равных частей. Вычисления провести в Excel.

**Задание 2.**

Сравнить полученный результат с результатами, полученными на практическом занятии №8.

Результаты оформить в таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
| **Метод интегрирования** | **Значение интеграла** |
| Метод прямоугольников |  |
| Метод трапеций |  |
| Метод парабол |  |
| Метод Гаусса |  |

**Задание 3.**

Сделать вывод о точности методов.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***f(x)*** | ***a*** | ***b*** |
| **1** |  | 1 | 2 |
| **2** |  | 1 | 2 |
| **3** |  | 2 | 3 |
| **4** |  | 1 | 2 |
| **5** |  | 1.2 | 2.2 |
| **6** |  | 0.5 | 1.5 |
| **7** |  | 2 | 3 |
| **8** |  | 3 | 4 |
| **9** |  | 1 | 2 |
| **10** |  | -1 | 0 |
| **11** |  | -0.5 | 0.5 |
| **12** |  | 0,1 | 1,1 |
| **13** |  | 0.2 | 1.2 |
| **14** |  | 1.5 | 2.5 |
| **15** |  | 0.1 | 1.1 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. На какой идее основывается построение квадратурных формул Гаусса?
2. Запишите формулу Гаусса.
3. Как строятся квадратурные формулы Гаусса, какова их по- грешность (остаточный член)?

Практическая работа № 10

**НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ЭЙЛЕРА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Решить дифференциальное уравнение у/=f(x,y) (1) численным методом ‑ значит для заданной последовательности аргументов х0, х1…, хn и числа у0, не определяя функцию у=F(x), найти такие значения у1, у2,…, уn, что уi=F(xi)(i=1,2,…, n) и F(x0)=y0.

Величина h=xk-xk-1  называется шагом интегрирования.

*Метод Эйлера* относиться к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции у(х).

Рекуррентные формулы метода Эйлера:

ук+1=ук+αкh

xk+1=xk+h

αk=f(xk+h/2, yk+f(xk,Yk)h/2)

yk=yk-1+f(xk-1,yk-1)h

Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции ук+1/2 в точках хк+1/2, затем находят значение правой части уравнения (1) в средней точке y/k+1/2=f(xk+1/2, yk+1/2) и определяют ук+1.

Для оценки погрешности в точке хк проводят вычисления ук с шагом h, затем с шагом 2h и берут 1/3 разницы этих значений:

| ук\*-у(хк)|=1/3(yk\*-yk),

где у(х)-точное решение дифференциального уравнения.

**Пример:** Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение c начальным условием y(0) = 1,3 на отрезке [0;1] применив h=0,2.

*Решение:* Имеем.

Составим таблицу значений функции f(x,y) с шагом h и h/2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x* | *yi (h=0.2)* | *yi (h=0.1)* |
| 0 | 1.3 | 1.3 |
| 0.1 |  | 1.33 |
| 0.2 | 1.35 | 1.38 |
| 0.3 |  | 1.46 |
| 0.4 | 1.52 | 1.56 |
| 0.5 |  | 1.68 |
| 0.6 | 1.77 | 1.82 |
| 0.7 |  | 1.98 |
| 0.8 | 2.09 | 2.15 |
| 0.9 |  | 2.33 |
| 1 | 2.47 | 2.53 |

При составлении таблицы проводились следующие вычисления:

Если h=0,2:

1. х0=0, у0=1,3 из начального условия;
2. х1=0,1,



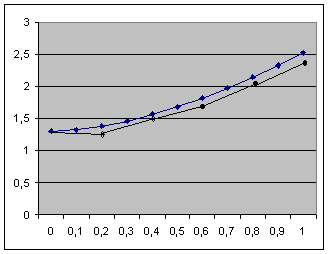
1. х2=0,2,



И т.д.

Аналогичные вычисления проводились и для h=0,1.

Таким образом, приближенное решение уравнения получаем в виде таблицы. Построим ломаную Эйлера для h=0,2 и h=0,1 в одной системе координат.



**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №10**

**Задание 1.**

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y’=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии y(a)=y0 и шаге интегрирования h методом Эйлера:

а) с применением «ручных» вычислений с шагом 2h.

б) с помощью программы для компьютера с шагом h.

в) Свести результаты вычислений в одну таблицу и сопоставить точность полученных значений функции. Пользуясь таблицей, сделать ручную прикидку графика интегральной кривой на бумаге.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***f(x)*** | ***a*** | ***b*** | ***y0*** | ***h*** |
| **1** |  | 3 | 5 | 1 | 0.2 |
| **2** |  | 2.6 | 4.6 | 1 | 0.2 |
| **3** |  | 0 | 2 | 0 | 0.2 |
| **4** |  | 1 | 3 | 1 | 0.2 |
| **5** |  | 0 | 2 | 0 | 0.2 |
| **6** |  | 1 | 3 | 1 | 0.2 |
| **7** |  | 0.5 | 2.5 | 0 | 0.2 |
| **8** |  | 0.2 | 2.2 | 1 | 0.2 |
| **9** |  | 1 | 3 | 2 | 0.2 |
| **10** |  | 3 | 5 | 1 | 0.2 |
| **11** |  | 0.2 | 2.4 | 1 | 0.2 |
| **12** |  | 1 | 3 | 0 | 0.2 |
| **13** |  | 2.6 | 4,6 | 2 | 0.2 |
| **14** |  | 1.5 | 3,5 | 0 | 0.2 |
| **15** |  | 2.1 | 4.1 | 0 | 0.2 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что является решением дифференциального уравнения?
2. На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?

Практическая работа № 11

**НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА**

***ЦЕЛЬ РАБОТЫ*:** закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений; получить умения приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта.

**КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Если к методу Эйлера подойти другим путем, не используя геометрических построений, то необходимо рассматривать производные функции f(x,y) и раскладывать эту функцию в степенной ряд. Но нахождение производных не является стандартной задачей, применяемой при решении математических задач систем программирования.

Альтернативный путь открывает метод Рунге-Кутта, названный по имени его создателей.

*Основная идея метода Рунге-Кутта такова:* вместо использования в формулах частных производных функции f(x,y) использовать лишь саму эту функцию, но на каждом шаге вычислять ее значение в нескольких точках.

На практике соблюдается некоторый компромисс между высоким порядком формул и их громоздкостью с одной стороны, и объемом вычислений по ним для достижения заданной точности, с другой. Запишем самую распространяемую формулу Рунге-Кутта четвертого порядка:

,



Общий недостаток методов Рунге-Кутта – отсутствие простых способов оценки погрешности метода. Погрешность на одном шаге оценить сравнительно не трудно, гораздо труднее оценить накопление погрешностей на протяжении многих шагов. Широко используемый на практике для этих методов способ контроля точности – *двойной счет*: вычисляем решение дифференциального уравнение с шагом *h* и *h/*2 , а потом сравниваем полученные результаты.

**Пример:** Решить дифференциальное уравнение  на отрезке  с начальным условием у(0)=1 и шагом h=0.05.

*Решение*: Сначала решим это уравнение аналитически:

- уравнение с разделяющимися переменными.

,



Применим начальное условие , получим:



Таким образом, частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

.

Пользуясь этой формулой, можно получить таблицу «точного» решение уравнения.

Найдем приближенное решение дифференциальное уравнение по методу Рунге-Кутта. Проведем последовательные вычисления по формулам (5.5), (5.6):

Имеем: f(x,y)=y(1-x), **=0, =1, h=0.05. Тогда



Подставим найденные значения в формулу (5.5):



Поскольку вычисления достаточно громоздки и трудоемки, то численные решения заданного уравнения можно найти с помощью программы на компьютере.

Для сравнения результатов построим таблицу, в которой укажем численные решения, полученные по методу Эйлера, методу Рунге-Кутта и «точное решение».

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | У | | |
| метод Эйлера | метод Рунге-Кутта | «точное решение» |
| 0,00  0,05  0,10  0,15  0,20  0,25  0,30  0,35  0,40  0,45  0,50 | 1  1,05  1,0999  1,1494  1,1982  1,2462  1,2929  1,3381  1,3816  1,4231  1,4622 | 1  1,0499  1,0997  1,1488  1,1972  1,2445  1,2905  1,3348  1,3771  1,4173  1,4550 | 1  1,0499  1,0997  1,1488  1,1972  1,2445  1,2905  1,3348  1,3771  1,4173  1,4550 |

Из таблицы видно, что результаты, получения по методу Рунге-Кутта практически совпадают с «точным» решением уравнения, в отличие от соответствующих значений, полученных по методу Эйлера.

**ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ №11**

**Задание 1**

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y’=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии y(a)=y0 методом Рунге-Кутта с помощью программы для компьютера с шагом h и с шагом h/2.

На основе результатов двойного счета сделать вывод о точности полученного решения.

**Задание 2**

Найти точное решение задачи Коши.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | ***f(x)*** | ***a*** | ***b*** | ***y0*** | ***h*** |
| **1** |  | 3 | 5 | 1 | 0.2 |
| **2** |  | 2.6 | 4.6 | 1 | 0.2 |
| **3** |  | 0 | 2 | 0 | 0.2 |
| **4** |  | 1 | 3 | 1 | 0.2 |
| **5** |  | 0 | 2 | 0 | 0.2 |
| **6** |  | 1 | 3 | 1 | 0.2 |
| **7** |  | 0.5 | 2.5 | 0 | 0.2 |
| **8** |  | 0.2 | 2.2 | 1 | 0.2 |
| **9** |  | 1 | 3 | 2 | 0.2 |
| **10** |  | 3 | 5 | 1 | 0.2 |
| **11** |  | 0.2 | 2.4 | 1 | 0.2 |
| **12** |  | 1 | 3 | 0 | 0.2 |
| **13** |  | 2.6 | 4,6 | 2 | 0.2 |
| **14** |  | 1.5 | 3,5 | 0 | 0.2 |
| **15** |  | 2.1 | 4.1 | 0 | 0.2 |

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. В чем основная идея метода Рунге-Кутта?
2. В чем отличие одношаговых методов Эйлера и Рунге-Кутта?

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

*Основные источники:*

1. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование: учебное пособие / В.Д. Колдаев; под ред. Л.Г. Гагариной. - Москва: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2021. - 336 с.

*Дополнительные источники:*

1. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. — 336 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1794612 (дата обращения: 13.12.2021). – Режим доступа: по подписке.

*Интернет-ресурсы:*

1. Единое информационно-образовательное пространство колледжа NetSchool. Форма доступа: http://sgtek.ru
2. Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: http://window.edu.ru
3. Информационно-справочная система. Форма доступа: [http://dit.isuct.ru](http://dit.isuct.ru/).
4. Информационно-справочная система. Форма доступа: <http://www.resolventa.ru>